函数的极限

徐海峰整理

September 9, 2024

数学科学学院，扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

函数的极限

回顾数列极限的定义

前面提到，数列 $\{a_n\}$ 是特殊的函数，可视为 $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$.

回顾数列极限的定义

前面提到, 数列 $\{a_n\}$ 是特殊的函数, 可视为 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $f(n)=a_n$.

回顾一下数列极限的定义.

前面提到, 数列 $\{a_n\}$ 是特殊的函数, 可视为 $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $f(n)=a_n$.

回顾一下数列极限的定义.

定义

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n>N$ 时, 总有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立, 则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A. 记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad \text{或} \quad a_n\to A\ (n\to\infty).$$

函数极限的定义

现将其中的 a_n 改写为 $f(n)$,

现将其中的 a_n 改写为 $f(n)$,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, 总有

$$|f(n) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(n)$ 当 $n \to +\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A \quad \text{或} \quad f(n) \to A \ (n \to \infty).$$

现将其中的 a_n 改写为 $f(n)$,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, 总有

$$|f(n) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(n)$ 当 $n \to +\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A \quad 或 \quad f(n) \to A \ (n \to \infty).$$

这里 $f(n)$ 定义在正整数集上, 我们需要考虑一般的定义在 $D \subset \mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$.

x趋向正无穷时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $D=(a,+\infty)$ 上的函数.

x趋向正无穷时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $D = (a, +\infty)$ 上的函数.

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, s.t., 当 $x > M$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to +\infty).$$

x趋向负无穷时函数$f(x)$极限的定义

类似的, 设 $f(x)$ 是定义在 $D=(-\infty,a)$ 上的函数.

x趋向负无穷时函数$f(x)$极限的定义

类似的, 设 $f(x)$ 是定义在 $D=(-\infty,a)$ 上的函数.

定义

$\forall\varepsilon>0$, $\exists M<0$, s.t., 当 $x<M$ 时, 总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

x趋向无穷时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $D=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$, $(a<b)$ 或 $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的函数.

x趋向无穷时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $D=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$, $(a<b)$ 或 $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的函数.

定义

$\forall\varepsilon>0$, $\exists M>0$, s.t., 当 $|x|>M$ 时, 总有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x\to\pm\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\ (x\to\pm\infty).$$

x趋向无穷时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 是定义在 $D = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, $(a < b)$ 或 $D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 上的函数.

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists M > 0$, s.t., 当 $|x| > M$ 时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to \pm\infty$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to \pm\infty).$$

注: 有时为方便也用 ∞ 代表 $\pm\infty$. (注意上下文, 之前提到有时将 ∞ 指代 $+\infty$.)

x趋向x_0时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 上有定义,

x趋向x_0时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 上有定义,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 (\delta < \delta_1)$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ (即 $0 < |x - x_0| < \delta$)时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限为 A. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

x趋向x_0^-时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个左 δ_1-邻域 $(x_0-\delta_1, x_0)$ 内有定义,

x趋向x_0^-时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个左 δ_1-邻域 $(x_0-\delta_1, x_0)$ 内有定义,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 (\delta < \delta_1)$, s.t., 当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ (即 $-\delta < x - x_0 < 0$)时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时有**左极限** A. 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A \ (x \to x_0^-).$$

x趋向x_0^-时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个左 δ_1-邻域 $(x_0-\delta_1, x_0)$ 内有定义,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 (\delta < \delta_1)$, s.t., 当 $x \in (x_0-\delta, x_0)$ (即 $-\delta < x - x_0 < 0$)时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时有**左极限** A. 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0^-).$$

$f(x)$ 在 x_0 处的左极限也记为 $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0 - 0)$.

x趋向x_0^+时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个右 δ_1-邻域 $(x_0, x_0+\delta_1)$ 内有定义,

x趋向x_0^+时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个右 δ_1-邻域 $(x_0, x_0+\delta_1)$ 内有定义,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0(\delta < \delta_1)$, s.t., 当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ (即 $0 < x - x_0 < \delta$)时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时有**右极限** A. 记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0^+).$$

x趋向x_0^+时函数$f(x)$极限的定义

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个右 δ_1-邻域 $(x_0, x_0+\delta_1)$ 内有定义,

定义

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 (\delta < \delta_1)$, s.t., 当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ (即 $0 < x - x_0 < \delta$)时, 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时有**右极限** A. 记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0^+).$$

$f(x)$ 在 x_0 处的右极限也记为 $f(x_0^+)$ 或 $f(x_0+0)$.

极限的若干情形汇总

Table 1: 自变量趋向于某个点的几种情形

$x \to x_0$	$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$x \to x_0^-$	$x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$x \to x_0^+$	$x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$x \to \pm\infty$	$x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$
$x \to -\infty$	$x \in (-\infty, -M)$
$x \to +\infty$	$x \in (M, +\infty)$

极限的若干情形汇总

Table 1: 自变量趋向于某个点的几种情形

$x \to x_0$	$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$x \to x_0^-$	$x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$x \to x_0^+$	$x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$x \to \pm\infty$	$x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$
$x \to -\infty$	$x \in (-\infty, -M)$
$x \to +\infty$	$x \in (M, +\infty)$

注: (1) 这里 $\delta > 0$, $M > 0$.

极限的若干情形汇总

Table 1: 自变量趋向于某个点的几种情形

$x \to x_0$	$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$x \to x_0^-$	$x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$x \to x_0^+$	$x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$x \to \pm\infty$	$x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$
$x \to -\infty$	$x \in (-\infty, -M)$
$x \to +\infty$	$x \in (M, +\infty)$

注: (1) 这里 $\delta > 0$, $M > 0$.
(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的左极限; 相应的 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的右极限.

极限的若干情形汇总

Table 1: 自变量趋向于某个点的几种情形

$x \to x_0$	$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$x \to x_0^-$	$x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$x \to x_0^+$	$x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$x \to \pm\infty$	$x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$
$x \to -\infty$	$x \in (-\infty, -M)$
$x \to +\infty$	$x \in (M, +\infty)$

注: (1) 这里 $\delta > 0$, $M > 0$.
(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的左极限; 相应的 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的右极限.

极限的若干情形汇总

Table 1: 自变量趋向于某个点的几种情形

$x \to x_0$	$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$
$x \to x_0^-$	$x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$x \to x_0^+$	$x \in (x_0, x_0 + \delta)$
$x \to \pm\infty$	$x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$
$x \to -\infty$	$x \in (-\infty, -M)$
$x \to +\infty$	$x \in (M, +\infty)$

注: (1) 这里 $\delta > 0$, $M > 0$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的左极限; 相应的 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 可以被认为是 $f(x)$ 在 ∞ 处的右极限.

这些都是**单侧极限**.

极限存在当且仅当左右极限都存在且相等

定理

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ $(A \in \mathbb{R})$ 当且仅当 $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

极限存在当且仅当左右极限都存在且相等

定理

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \ (A \in \mathbb{R})$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

定理

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A \ (A \in \mathbb{R})$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

极限存在当且仅当左右极限都存在且相等

定理

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \ (A \in \mathbb{R})$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

定理

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A \ (A \in \mathbb{R})$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Proof.

根据定义证明, 略. □

一些例子

例

设 $y = f(x) \equiv C$, $\forall x \in (a, b)$. 则对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

例

设 $y = f(x) \equiv C, \forall x \in (a, b)$. 则对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

以下, 对于一些常见的（初等）函数, 不再特别指明定义域. 上面的常值函数在某点的极限就直接写为 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

例

设 $y = f(x) \equiv C$, $\forall x \in (a, b)$. 则对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

以下, 对于一些常见的（初等）函数, 不再特别指明定义域. 上面的常值函数在某点的极限就直接写为 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

例

设 $y = f(x) \equiv C, \forall x \in (a,b)$. 则对任意 $x_0 \in (a,b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

以下, 对于一些常见的（初等）函数, 不再特别指明定义域. 上面的常值函数在某点的极限就直接写为 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t. 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ (即 $0 < |x - x_0| < \delta$)时,

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

例

设 $y = f(x) \equiv C, \forall x \in (a, b)$. 则对任意 $x_0 \in (a, b)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C$.

以下, 对于一些常见的（初等）函数, 不再特别指明定义域. 上面的常值函数在某点的极限就直接写为 $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t. 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ (即 $0 < |x - x_0| < \delta$)时,

$$|x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. □

例

$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, 这里 $n \in \mathbb{Z}^+$.

例

$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, 这里 $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proof.

(1) 当 $x_0 = 0$ 时, 要证 $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, 这里 $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proof.

(1) 当 $x_0 = 0$ 时, 要证 $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta < \sqrt[n]{\varepsilon}$, s.t., 当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$|x^n - 0| = |x|^n < \delta^n < \varepsilon.$$

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, 这里 $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proof.

(1) 当 $x_0 = 0$ 时, 要证 $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta < \sqrt[n]{\varepsilon}$, s.t., 当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$|x^n - 0| = |x|^n < \delta^n < \varepsilon.$$

(2) 设 $x_0 \neq 0$, 当 $0 < \delta < |x_0|$ 时, $\max\{|x_0 + \delta|, |x_0 - \delta|\} < 2|x_0|$.

例

$\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, 这里 $n \in \mathbb{Z}^+$.

Proof.

(1) 当 $x_0 = 0$ 时, 要证 $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta < \sqrt[n]{\varepsilon}$, s.t., 当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$|x^n - 0| = |x|^n < \delta^n < \varepsilon.$$

(2) 设 $x_0 \neq 0$, 当 $0 < \delta < |x_0|$ 时, $\max\{|x_0 + \delta|, |x_0 - \delta|\} < 2|x_0|$.

对任意正整数 n, 有

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

$\square$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists 0 < \delta < |x_0|$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$
\begin{aligned}
|x^n - x_0^n| &= |x - x_0| \cdot \left| \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} x_0^i \right| < \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |x|^{n-1-i} |x_0|^i \\
&< \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |2x_0|^{n-1-i} |x_0|^i = \delta \cdot |x_0|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \\
&= \delta \cdot |x_0|^{n-1} (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) \\
&= \delta \cdot |x_0|^{n-1} \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&< \delta \cdot 2^n |x_0|^{n-1} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists 0 < \delta < |x_0|$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$
\begin{aligned}
|x^n - x_0^n| &= |x - x_0| \cdot \left| \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} x_0^i \right| < \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |x|^{n-1-i} |x_0|^i \\
&< \delta \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |2x_0|^{n-1-i} |x_0|^i = \delta \cdot |x_0|^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \\
&= \delta \cdot |x_0|^{n-1} (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) \\
&= \delta \cdot |x_0|^{n-1} \frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
&< \delta \cdot 2^n |x_0|^{n-1} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

为此, 取 $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2^n |x_0|^{n-1}}$. 此外, 只要 $\varepsilon < (2|x_0|)^n$, 即有 $\dfrac{\varepsilon}{2^n |x_0|^{n-1}} < |x_0|$. $\square$

例

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

例

$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0.$

Proof.

利用三角函数的和差化积公式,

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

例

$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$

Proof.

利用三角函数的和差化积公式,

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

例

$\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$

Proof.

利用三角函数的和差化积公式,

$$\sin x - \sin x_0 = 2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin x_0| &= \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} \\ &= |x-x_0| < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

例

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0.$$

Proof.

利用三角函数的和差化积公式,

$$\sin x-\sin x_0=2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\varepsilon>0$, s.t., 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin x_0|&=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}\\&=|x-x_0|<\delta=\varepsilon\end{aligned}$$

这表明 $\sin x\to\sin x_0\ (x\to x_0)$. □

这里要用到一个结论.

命题

对于 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有 $|\sin x| < |x|$.

Proof.

在单位圆中使用面积证明. $\square$

例

$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$

例

$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$

Proof.

仿照前例, 利用三角函数的和差化积公式,

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

例

$\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$

Proof.

仿照前例, 利用三角函数的和差化积公式,

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

例

$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$

Proof.

仿照前例, 利用三角函数的和差化积公式,

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left| -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \\ &\leqslant 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| < 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \\ &= |x - x_0| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

例

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Proof.

仿照前例, 利用三角函数的和差化积公式,

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= \left|-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| < 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2} \\ &= |x-x_0| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

这表明 $\cos x \to \cos x_0$ $(x \to x_0)$. $\square$

例

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0.$$

例

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

Proof.

(证法二) 注意 $y = \cos x$ 由 $y = \sin x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得, 即 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

例

$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Proof.

(证法二) 注意 $y = \cos x$ 由 $y = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 而得, 即 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.因此

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \lim_{x \to x_0} \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \lim_{x + \frac{\pi}{2} \to x_0 + \frac{\pi}{2}} \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x_0 + \frac{\pi}{2}) = \cos(x_0).$$

□

例

$\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$

Proof.

(证法二) 注意 $y = \cos x$ 由 $y = \sin x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得, 即 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.因此

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \lim_{x \to x_0} \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \lim_{x + \frac{\pi}{2} \to x_0 + \frac{\pi}{2}} \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x_0 + \frac{\pi}{2}) = \cos(x_0).$$

□

注

这里需要证明 $\lim\limits_{x \to x_0} (x + b) = x_0 + b$. 当然, 更一般的, 容易证明 $\lim\limits_{x \to x_0} (kx + b) = kx_0 + b$.

例

$\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0.$

Proof.

(证法二) 注意 $y=\cos x$ 由 $y=\sin x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 而得, 即 $\cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$.因此

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \lim_{x\to x_0}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \lim_{x+\frac{\pi}{2}\to x_0+\frac{\pi}{2}}\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x_0+\frac{\pi}{2}) = \cos(x_0).$$

□

注

这里需要证明 $\lim\limits_{x\to x_0}(x+b)=x_0+b$. 当然, 更一般的, 容易证明 $\lim\limits_{x\to x_0}(kx+b)=kx_0+b$.

注

也可以使用 $\cos x = \sin(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 证明.

例

设 $x_0 \geqslant 0$, 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

例

设 $x_0 \geqslant 0$, 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解. 当 $x_0 = 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

例

设 $x_0 \geqslant 0$, 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解. 当 $x_0 = 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

例

设 $x_0 \geqslant 0$, 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解. 当 $x_0 = 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

当 $x_0 > 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon.$$

例

设 $x_0 \geqslant 0$, 研究 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 x_0 处的极限.

解. 当 $x_0 = 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon^2$, 当 $0 < x < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

当 $x_0 > 0$ 时, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon\sqrt{x_0}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \leqslant \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. ∎

例

设 $a > 0$. 研究函数 $f(x) = a^x$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

例

设 $a > 0$. 研究函数 $f(x) = a^x$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 当 $a = 1$ 时, $a^x = 1$, 因此 $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$;

例

设 $a>0$. 研究函数 $f(x)=a^x$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. 当 $a=1$ 时, $a^x=1$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$;当 $a>1$ 时, $\forall 0<\varepsilon<1$,

例

设 $a > 0$. 研究函数 $f(x) = a^x$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 当 $a = 1$ 时, $a^x = 1$, 因此 $\lim_{x\to 0} a^x = 1$;当 $a > 1$ 时, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 取

$$\delta = \min\{-\log_a(1-\varepsilon), \log_a(1+\varepsilon)\},$$

例

设 $a > 0$. 研究函数 $f(x) = a^x$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 当 $a = 1$ 时, $a^x = 1$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$;当 $a > 1$ 时, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 取

$$\delta = \min\{-\log_a(1-\varepsilon), \log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$\log_a(1-\varepsilon) \leqslant -\delta < x < \delta \leqslant \log_a(1+\varepsilon),$$

例

设 $a>0$. 研究函数 $f(x)=a^x$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. 当 $a=1$ 时, $a^x=1$, 因此 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$;当 $a>1$ 时, $\forall 0<\varepsilon<1$, 取

$$\delta=\min\{-\log_a(1-\varepsilon),\log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$\log_a(1-\varepsilon)\leqslant-\delta<x<\delta\leqslant\log_a(1+\varepsilon),$$

即

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon,$$

例

设 $a > 0$. 研究函数 $f(x) = a^x$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 当 $a = 1$ 时, $a^x = 1$, 因此 $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$;当 $a > 1$ 时, $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 取

$$\delta = \min\{-\log_a(1-\varepsilon), \log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0 < |x| < \delta$ 时,

$$\log_a(1-\varepsilon) \leqslant -\delta < x < \delta \leqslant \log_a(1+\varepsilon),$$

即

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon,$$

即 $|a^x - 1| < \varepsilon$, 这说明 $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. ∎

续

解. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递减函数.

续

解. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递减函数.$\forall \varepsilon \in (0,1)$, 取

$$\delta = \min\{\log_a(1-\varepsilon), -\log_a(1+\varepsilon)\},$$

续

解. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递减函数.$\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取

$$\delta = \min\{\log_a(1-\varepsilon), -\log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$\log_a(1+\varepsilon) \leqslant -\delta < x < \delta \leqslant \log_a(1-\varepsilon),$$

续

解. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递减函数.$\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取

$$\delta = \min\{\log_a(1-\varepsilon), -\log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$\log_a(1+\varepsilon) \leqslant -\delta < x < \delta \leqslant \log_a(1-\varepsilon),$$

即

$$1-\varepsilon < a^x < 1+\varepsilon,$$

续

解. 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格单调递减函数.$\forall \varepsilon \in (0, 1)$, 取

$$\delta = \min\{\log_a(1-\varepsilon), -\log_a(1+\varepsilon)\},$$

当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$\log_a(1+\varepsilon) \leqslant -\delta < x < \delta \leqslant \log_a(1-\varepsilon),$$

即

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. ∎

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0 = 0$ 时, 已证. 下设 $x_0 \neq 0$.

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0 = 0$ 时, 已证. 下设 $x_0 \neq 0$.

$$a^x = a^{x_0} a^{x - x_0}.$$

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0 = 0$ 时, 已证. 下设 $x_0 \neq 0$.

$$a^x = a^{x_0} a^{x - x_0}.$$

注意 a^{x_0} 是常数.

命题

设 $a>0$, 则 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0=0$ 时, 已证. 下设 $x_0\neq 0$.

$$a^x = a^{x_0}a^{x-x_0}.$$

注意 a^{x_0} 是常数.如果有下述结论(后面将给出):

$$\lim_{x\to x_0}[cf(x)] = c\lim_{x\to x_0} f(x),$$

命题

设 $a>0$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0=0$ 时, 已证. 下设 $x_0\neq 0$.

$$a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}.$$

注意 a^{x_0} 是常数.如果有下述结论(后面将给出):

$$\lim_{x\to x_0}[cf(x)] = c\lim_{x\to x_0} f(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0}\left(a^{x_0} a^{x-x_0}\right) = a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0}\cdot 1 = a^{x_0}.$$

□

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

当 $x_0 = 0$ 时, 已证. 下设 $x_0 \neq 0$.

$$a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}.$$

注意 a^{x_0} 是常数.如果有下述结论(后面将给出):

$$\lim_{x\to x_0} [cf(x)] = c \lim_{x\to x_0} f(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} (a^{x_0} a^{x-x_0}) = a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}.$$

□

因此, 有必要探索极限的运算法则, 这会给极限的计算带来方便.

直接证明

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

命题

设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

Proof.

留作习题. $\square$

例

设 $a > 0$, $a \neq 1$. 研究函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $x_0 = 1$ 处的极限.

例

设 $a > 0$, $a \neq 1$. 研究函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $x_0 = 1$ 处的极限.

解. 不妨设 $a > 1$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{\varepsilon},$$

例

设 $a>0$, $a\neq 1$. 研究函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $x_0=1$ 处的极限.

解. 不妨设 $a>1$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t.,

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<x<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

例

设 $a>0$, $a\neq 1$. 研究函数 $f(x)=\log_a x$ 在 $x_0=1$ 处的极限.

解. 不妨设 $a>1$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t.,

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$a^{-\varepsilon}<1-\delta<x<1+\delta<a^{\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x-0|<\varepsilon,$$

例

设 $a > 0$, $a \neq 1$. 研究函数 $f(x) = \log_a x$ 在 $x_0 = 1$ 处的极限.

解. 不妨设 $a > 1$. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{\varepsilon},$$

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$a^{-\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^{\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x - 0| < \varepsilon,$$

从而 $\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$. ∎

续

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.

续

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

续

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x - 0| < \varepsilon,$$

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x - 0| < \varepsilon,$$

从而 $\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$. ∎

续

解. 若 $0 < a < 1$, 此时 $\log_a x$ 和 a^x 都是严格单调递减函数.$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.,

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$a^{\varepsilon} < 1 - \delta < x < 1 + \delta < a^{-\varepsilon},$$

即

$$|\log_a x - 0| < \varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{x \to 1} \log_a x = 0$. ∎

同样, 在介绍函数极限的运算法则后, 可以证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

函数极限的性质

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

定理

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限惟一.

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

定理

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限惟一.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

定理

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限惟一.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限惟一.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

对于上面所给定的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|f(x) - B| < \varepsilon$.

函数极限的惟一性

以下仅对 $x \to x_0$ 这种情形进行叙述和证明, 其他五种情况是类似的.

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 则该极限惟一.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$.

根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

对于上面所给定的 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|f(x) - B| < \varepsilon$.

于是, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 且 $|f(x) - B| < \varepsilon$. $\square$

Proof.

因此,

$$|A - B| = |(f(x) - B) - (f(x) - A)| \leqslant |f(x) - A| + |f(x) - B| < 2\varepsilon.$$

Proof.

因此,

$$|A-B| = |(f(x)-B)-(f(x)-A)| \leqslant |f(x)-A| + |f(x)-B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$,

Proof.

因此,

$$|A-B|=|(f(x)-B)-(f(x)-A)|\leqslant|f(x)-A|+|f(x)-B|<2\varepsilon.$$

若 $A\neq B$, 则只要取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}|A-B|$ 就得出矛盾.

Proof.

因此,

$$|A-B| = |(f(x)-B)-(f(x)-A)| \leqslant |f(x)-A| + |f(x)-B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$, 则只要取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|A-B|$ 就得出矛盾. 故 $A = B$. $\square$

函数极限的局部有界性

命题

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有界. 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

函数极限的局部有界性

命题

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有界. 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

Proof.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有界. 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

Proof.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$,根据定义, 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists\delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$.

函数极限的局部有界性

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有界. 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

Proof.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,根据定义, 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$.从而,

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| =: M$$

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 则 $f(x)$ 在 x_0 某个去心邻域内有界. 即存在常数 $M > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

Proof.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$,根据定义, 对于 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$.从而,

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| =: M$$

故对于 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, $|f(x)| \leqslant M$. $\square$

函数极限的局部保号性

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

Proof.

只对 $A < 0$ 证明($A > 0$ 时证明类似).

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

Proof.

只对 $A < 0$ 证明($A > 0$ 时证明类似).设 $A < 0$, 取 $\varepsilon = -\frac{A}{2} > 0$.

函数极限的局部保号性

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

Proof.

只对 $A < 0$ 证明($A > 0$ 时证明类似).设 $A < 0$, 取 $\varepsilon = -\frac{A}{2} > 0$.由极限的定义, $\exists \delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

函数极限的局部保号性

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

Proof.

只对 $A < 0$ 证明($A > 0$ 时证明类似).设 $A < 0$, 取 $\varepsilon = -\frac{A}{2} > 0$.由极限的定义, $\exists\delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

这推出

$$f(x) < A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0.$$

□

函数极限的局部保号性

推论

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）, 则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）, 则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

Proof.

这里对 $f(x) \leqslant 0$ 的情形证明.

推论

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

Proof.

这里对 $f(x)\leqslant 0$ 的情形证明.

(反证法) 假设 $A>0$,

函数极限的局部保号性

推论

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$）, 则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

Proof.

这里对 $f(x)\leqslant 0$ 的情形证明.

(反证法) 假设 $A>0$,由极限的保号性, 存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,

推论

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

Proof.

这里对 $f(x) \leqslant 0$ 的情形证明.

(反证法) 假设 $A > 0$,由极限的保号性, 存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$,使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$.

推论

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$）, 则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

Proof.

这里对 $f(x) \leqslant 0$ 的情形证明.
(反证法) 假设 $A > 0$,由极限的保号性, 存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$,使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $f(x) > 0$.矛盾. 故 $A \leqslant 0$. □

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0(n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$,

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$.

注意到 $x_n \neq x_0$, $\forall n$,

命题

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$.

注意到 $x_n \neq x_0$, $\forall n$,即 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$.
注意到 $x_n \neq x_0$, $\forall n$,即 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.故 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域，且 $x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$，则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义，$\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，s.t.，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，s.t.，当 $n > N$ 时，$|x_n - x_0| < \delta$.

注意到 $x_n \neq x_0$，$\forall n$,即 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.故 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

总结，$\forall\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$，s.t.，当 $n > N$ 时，有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域，且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$，则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛，且 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义，$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t.，当 $n > N$ 时，$|x_n - x_0| < \delta$.

注意到 $x_n \neq x_0$, $\forall n$,即 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.故 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

总结，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t.，当 $n > N$ 时，有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$. □

函数极限与数列极限的关系

命题

若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在, $\{x_n\}$ 取自 $f(x)$ 的定义域, 且 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0 (n \in \mathbb{Z}^+)$, 则数列 $\{f(x_n)\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Proof.

设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.根据极限的定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

又 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$,故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, $|x_n - x_0| < \delta$.

注意到 $x_n \neq x_0$, $\forall n$,即 $x_n \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.故 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

总结, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, 有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. □

注: 这个命题是下面 Heine 定理的一部分.

函数极限存在与否的判别方法

Heine 定理

定理

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义, 则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当: 对任何收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \neq x_0 (\forall n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Heine 定理

定理

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义, 则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当: 对任何收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \neq x_0(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Proof.

只需证明充分性. 反证法.

定理

设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义, 则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当: 对任何收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \neq x_0(\forall n)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Proof.

只需证明充分性. 反证法.假设 f 在 x_0 处的极限不为 A(极限也可能不存在), 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任何 $\delta > 0$, 都存在 x_δ, 使得

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta, \quad |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

□

续

Proof.

特别地, $\forall n \geqslant 1$, 均存在 x_n, 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Proof.

特别地, $\forall n \geqslant 1$, 均存在 x_n, 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

这说明 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, 但 $f(x_n)$ 不收敛到 A. 矛盾. $\square$

Heine 定理的简明叙述

Heine 定理可以改述如下:

$$f(x)\ \text{在} x_0\ \text{处有极限} \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0), \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ \text{存在}.$$

Heine 定理的简明叙述

Heine 定理可以改述如下:

$$f(x)\ 在x_0\ 处有极限\ \Leftrightarrow\ \forall x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0),\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ 存在.$$

Proof.

只要说明如果 $f(x_n)$ 均收敛, 则它们的极限必定都相同.

Heine 定理的简明叙述

Heine 定理可以改述如下:

$$f(x)\ 在 x_0\ 处有极限 \ \Leftrightarrow\ \forall x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0),\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ 存在.$$

Proof.

只要说明如果 $f(x_n)$ 均收敛, 则它们的极限必定都相同.

(反证法) 若存在 $x_n' \to x_0$, $x_n' \neq x_0$, $f(x_n') \to A$ 以及 $x_n'' \to x_0$, $x_n'' \neq x_0$, $f(x_n'') \to B$.

Heine 定理的简明叙述

Heine 定理可以改述如下:

$$f(x) \text{ 在} x_0 \text{ 处有极限 } \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \ (x_n \neq x_0), \lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ 存在}.$$

Proof.

只要说明如果 $f(x_n)$ 均收敛, 则它们的极限必定都相同.

(反证法) 若存在 $x_n' \to x_0$, $x_n' \neq x_0$, $f(x_n') \to A$ 以及 $x_n'' \to x_0$, $x_n'' \neq x_0$, $f(x_n'') \to B$.当 $B \neq A$ 时, 考虑新的点列 x_n,

$$x_n = \begin{cases} x_{2k}', & n = 2k, \\ x_{2k-1}'', & n = 2k-1. \end{cases}$$

$k \geqslant 1$.

Heine 定理的简明叙述

Heine 定理可以改述如下:

$$f(x)\text{ 在}x_0\text{ 处有极限 } \Leftrightarrow \forall x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0),\ \lim_{n\to\infty} f(x_n)\text{ 存在.}$$

Proof.

只要说明如果 $f(x_n)$ 均收敛, 则它们的极限必定都相同.

(反证法) 若存在 $x_n' \to x_0$, $x_n' \neq x_0$, $f(x_n') \to A$ 以及 $x_n'' \to x_0$, $x_n'' \neq x_0$, $f(x_n'') \to B$.当 $B \neq A$ 时, 考虑新的点列 x_n,

$$x_n = \begin{cases} x_{2k}', & n = 2k, \\ x_{2k-1}'', & n = 2k-1. \end{cases}$$

$k \geqslant 1$.则 $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, 但 $f(x_n)$ 不收敛, 矛盾. □

例

研究函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 选取点列 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ 以及 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $x_n, y_n \to 0$, $x_n, y_n \neq 0$, 且

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0, \quad f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

例

研究函数 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 选取点列 $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ 以及 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则 $x_n, y_n \to 0$, $x_n, y_n \neq 0$, 且

$$f(x_n) = \sin(n\pi) = 0, \quad f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

由 Heine 定理, 知 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限不存在. ∎