



极限存在准则

徐海峰整理

September 23, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

极限存在准则

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列,

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列, 且

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall n \geqslant N_0,$$

其中 N_0 为一正整数.

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列, 且

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 为一正整数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列, 且

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq N_0,$$

其中 N_0 为一正整数. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0,$

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A ,

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 ,

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leq b_n \leq c_n$,

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon,$$

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A , 故存在 N_1, N_2 , 当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon,$$

这说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.



例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 1}{n^3} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n} + \cdots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + (n-1)n} \right]$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 1}{n^3} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n} + \cdots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + (n-1)n} \right]$

解. 对于 $0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2} < \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

例

$$\text{求极限 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 1}{n^3} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n} + \cdots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + (n-1)n} \right]$$

解. 对于 $0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2} < \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + n^2} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n(n^2 + 1)}{n^3},$$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 1}{n^3} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n} + \cdots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + (n-1)n} \right]$

解. 对于 $0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2} < \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + n^2} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n(n^2 + 1)}{n^3},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + n^2} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1)}{n^3},$$

例

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2 + 1}{n^3} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + n} + \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n} + \cdots + \frac{n^2 + 1}{n^3 + (n-1)n} \right]$

解. 对于 $0 \leq k < n, k \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2 + 1}{n^3 + n^2} < \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n^2 + 1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + n^2} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} \leq \frac{n(n^2 + 1)}{n^3},$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1)}{n^3 + n^2} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1)}{n^3},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^2 + 1}{n^3 + kn} = 1$.



例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

解. 当 $n \geq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right] \\ &\leq n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

解. 当 $n \geqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right] \\ &\leqslant n^\alpha \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$. ■

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geq 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geq 0$.

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geq 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geq 0$. 则有

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geq 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geq 0$. 则有

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leq \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geq 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geq 0$. 则有

$$a = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leq \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

□

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$. 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$. 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$. 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.



Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$. 根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.



Exer. 用同样的思路证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可. 若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可. 若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可. 若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列. 因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall n \geq 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可. 若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列. 因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall n \geq 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall n \geq 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$. 若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ ($n \geq 1$) 即可. 若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列. 因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall n \geq 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall n \geq 1.$$

由夹逼原理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

□

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\dot{U}(x_0, \delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

函数极限的夹逼准则(原理)

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\dot{U}(x_0, \delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

若 f_1, f_2 在 x_0 的极限存在且等于 A ,

函数极限的夹逼准则(原理)

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\dot{U}(x_0, \delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x).$$

若 f_1, f_2 在 x_0 的极限存在且等于 A , 则 f 在 x_0 处的极限也等于 A .

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0,$

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$,

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 ,

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$,

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 由于 $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$,

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 由于 $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, 我们就有

$$A - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < A + \varepsilon,$$

函数极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, 故存在 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 由于 $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$, 我们就有

$$A - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < A + \varepsilon,$$

这说明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.



例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

Proof.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1+x < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

Proof.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1+x < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

当 $x > 0$ 时, $1 < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1+x$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

Proof.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1+x < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

当 $x > 0$ 时, $1 < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1+x$. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$. □

例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

例

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

Proof.

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(1+x)},$$

利用已证明的 $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ 和复合函数极限法则即可证明. □

重要极限I

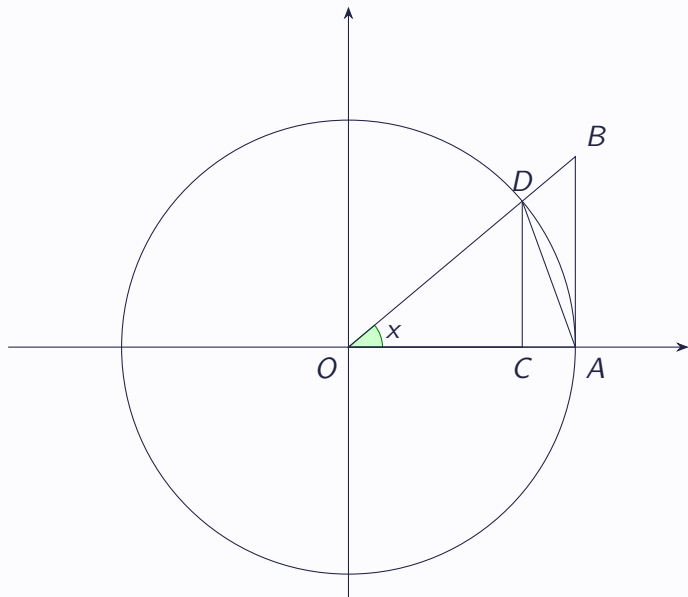
命题

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

这个极限的证明通常使用几何的方法得到不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

然后利用函数极限的夹逼准则证明. (相关讨论见问题3402.)



Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形} OAD} < S_{\triangle OAB}$,

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形} OAD} < S_{\triangle OAB}$, 故

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形} OAD} < S_{\triangle OAB}$, 故

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形} OAD} < S_{\triangle OAB}$, 故

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形} OAD} < S_{\triangle OAB}$, 故

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立. 因此, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形. 作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形}OAD} < S_{\triangle OAB}$, 故

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立. 因此, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 2 \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

由夹逼原理, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

因此

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} > 1 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

因此

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

由夹逼原理, 得 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.



命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

命题

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Proof.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$



单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列,

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 当上式中的 “ $\leq$ ” 号换成 “ $<$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的;

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 当上式中的 “ $\leq$ ” 号换成 “ $<$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的;

若

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列,

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 当上式中的 “ $\leq$ ” 号换成 “ $<$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的;

若

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 当上式中的 “ $\geq$ ” 号换成 “ $>$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是严格单调递减的;

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**, 当上式中的 “ $\leq$ ” 号换成 “ $<$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递增**的;

若

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减数列**, 当上式中的 “ $\geq$ ” 号换成 “ $>$ ” 号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递减**的;

单调递增数列和单调递减数列统称为**单调数列**.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ' , 均有 $\gamma \leq \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ' , 均有 $\gamma \leq \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ' , 均有 $\gamma \leq \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A 的下界和下确界.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ' , 均有 $\gamma \leq \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A 的下界和下确界. 下确界即最大下界.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leq \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ' , 均有 $\gamma \leq \gamma'$, 则称 γ 为 A 的最小上界或上确界, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A 的下界和下确界. 下确界即最大下界. A 的下确界记为 $\inf A$.

确界原理

定理

$\mathbb{R}$ 的非空子集如果有上界则必有上确界.

确界原理

定理

$\mathbb{R}$ 的非空子集如果有上界则必有上确界.

Proof.

请参考梅加强著《数学分析》，定理的证明用到了 Dedekind 分割. □

注

类似的, 若非空子集 $A \subset \mathbb{R}$ 有下界, 则必有下确界.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leq x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leq \inf A$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leq x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leq \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leq \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leq \sup B$. □

注

确界不等式其实非常直观.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leq x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leq \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leq \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leq \sup B$. □

注

确界不等式其实非常直观. 较小集合的下确界大于等于较大集合的下确界;

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geq \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leq \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leq x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leq \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leq \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leq \sup B$. □

注

确界不等式其实非常直观. 较小集合的下确界大于等于较大集合的下确界; 较大集合的上确界大于等于较小集合的上确界.

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$;

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

- (1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$;
- (2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geq 1\}$.

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geq 1\}$.

Proof.

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$, 先考虑 M 有限的情形.

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geq 1\}$.

Proof.

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$, 先考虑 M 有限的情形.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N , 使得

$$M - \varepsilon < a_N \leq M,$$

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geq 1\}$.

Proof.

(1) 记 $M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$, 先考虑 M 有限的情形.

任给 $\varepsilon > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N , 使得

$$M - \varepsilon < a_N \leq M,$$

因为 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故当 $n \geq N$ 时,

$$M - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq M < M + \varepsilon,$$

Proof.

由数列极限的定义即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$.

Proof.

由数列极限的定义即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$.

如果 $M = +\infty$, 则任给 $A > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N , 使得 $a_N > A$.

Proof.

由数列极限的定义即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$.

如果 $M = +\infty$, 则任给 $A > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N , 使得 $a_N > A$. 由于 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故当 $n \geq N$ 时有 $a_n \geq a_N > A$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}.$$



Proof.

由数列极限的定义即知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}$.

如果 $M = +\infty$, 则任给 $A > 0$, 由上确界的定义, 存在 a_N , 使得 $a_N > A$. 由于 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 故当 $n \geq N$ 时有 $a_n \geq a_N > A$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \sup\{a_k \mid k \geq 1\}.$$



由此推出

推论

单调有界数列必有（有限）极限.

例

任何收敛数列都有单调的收敛子列.

例

任何收敛数列都有单调的收敛子列.

Proof.

留作习题.



例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \dots$$

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \dots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \dots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$. 考察奇数项列 $\{a_{2k-1}\}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \frac{89}{144}, \frac{233}{377}, \frac{610}{987}, \frac{1597}{2584}, \dots$$

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$, $n \geq 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \dots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$. 考察奇数项列 $\{a_{2k-1}\}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \frac{89}{144}, \frac{233}{377}, \frac{610}{987}, \frac{1597}{2584}, \dots$$

和偶数项列 $\{a_{2k}\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \frac{55}{89}, \frac{144}{233}, \frac{377}{610}, \frac{987}{1597}, \frac{2584}{4181}, \dots$$

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

比如, 若 a, b, c, d, e, f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$.

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

比如, 若 a, b, c, d, e, f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$. 我们证明

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} > \frac{e}{f}.$$

从而 $\{a_{2k-1}\}$ 是单调递减的.

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

比如, 若 a, b, c, d, e, f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$. 我们证明

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{e}{f}.$$

从而 $\{a_{2k-1}\}$ 是单调递减的.

注意到 $e = c + d, f = d + e = c + 2d$, 因此

$$\frac{c}{d} > \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{c+d}{c+2d} \Leftrightarrow c^2 + cd > d^2.$$

然后将 $c = a + b, d = a + 2b$ 代入, 则 $c^2 + cd > d^2$ 当且仅当 $a^2 + ab > b^2$, 此即

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

解. 利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$, 并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{a_{2k}\}$ 单调递增, 因此它们都是收敛的, 极限分别记为 A, B . 则

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a_{2k-1}} = \frac{1}{1 + A},$$
$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + a_{2k}} = \frac{1}{1 + B},$$

从上式解出惟一解 $A = B = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ■

定理

(1) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域（或右邻域）内单调且有界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
(或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$) 必存在.

定理

(1) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域（或右邻域）内单调且有界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

（或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ）必存在.

(2) 若存在 $M > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -M)$ （或 $(M, +\infty)$ ）内单调且有界, 则 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ （或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ）必存在.

利用单调数列研究一般的数列

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列,

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列, 且

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n.$$

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列, 且

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n.$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的下极限和上极限,

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \quad \bar{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列, 且

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n.$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\bar{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**, 记为

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n, \quad \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n.$$

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列,

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为 **Cauchy 数列** 或 **基本列**.

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为 **Cauchy 数列** 或 **基本列**.

注

有时简称 Cauchy 数列为 Cauchy 列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N + 1\}$,

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N + 1\}$, 则当 $n \leq N$ 时, 显然 $|a_n| \leq M$;

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N + 1\}$, 则当 $n \leq N$ 时, 显然 $|a_n| \leq M$; 而当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leq M,$$

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N + 1\}$, 则当 $n \leq N$ 时, 显然 $|a_n| \leq M$; 而当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leq M,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为有界数列.



柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

(充分性) 设 $\{a_n\}$ 收敛于 A .

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

(充分性) 设 $\{a_n\}$ 收敛于 A . 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

(充分性) 设 $\{a_n\}$ 收敛于 A . 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

(充分性) 设 $\{a_n\}$ 收敛于 A . 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.



柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

在上式中令 $m \rightarrow \infty$,

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

(必要性) 设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列. 根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall m, n > N.$$

在上式中令 $m \rightarrow \infty$, 利用上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \leq \overline{\lim_{m \rightarrow \infty}} a_m - a_n \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall n > N.$$



柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

即

$$|A - a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

Proof.

即

$$|A - a_n| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

这说明 $\{a_n\}$ 收敛于 A .



柯西(Cauchy)



Figure 1: Cauchy

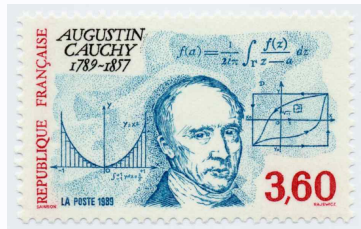


Figure 2: Cauchy (1789-1857)

柯西(Cauchy)



Figure 1: Cauchy

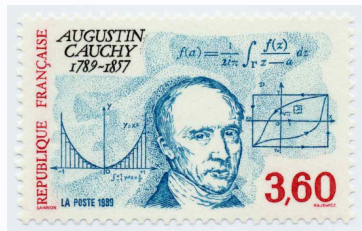


Figure 2: Cauchy (1789-1857)

Augustin-Louis Cauchy (奥古斯丁-路易斯柯西), 1789年出生于法国巴黎.

柯西(Cauchy)



Figure 1: Cauchy

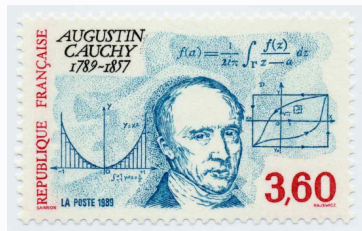


Figure 2: Cauchy (1789-1857)

Augustin-Louis Cauchy (奥古斯丁-路易斯柯西), 1789年出生于法国巴黎. 柯西是实分析和复分析以及置换群研究的先驱. 他同时也研究无穷级数的敛散性、微分方程、行列式、概率论以及数学物理.

重要极限II

定理

极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

存在.

定理

极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

存在.

记此极限为 e .

Proof.

记 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdots (1 + \frac{1}{n})}_{n \uparrow} \cdot 1 \\ &< \left[\frac{n \cdot (1 + \frac{1}{n}) + 1}{n + 1} \right]^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

Proof.

记 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdots (1 + \frac{1}{n})}_{n \uparrow} \cdot 1 \\ &< \left[\frac{n \cdot (1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} \right]^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

(这里用到了不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

其中 $x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

Proof.

记 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$,

$$\begin{aligned} a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \underbrace{(1 + \frac{1}{n}) \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdots (1 + \frac{1}{n})}_{n \uparrow} \cdot 1 \\ &< \left[\frac{n \cdot (1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} \right]^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

(这里用到了不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

其中 $x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. 下面还将用到.)

□

Proof.

另一方面,

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\uparrow} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&> \left(\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right)^n \\&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\uparrow} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&> \left(\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right)^n \\&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $a_n < 4^{\frac{n}{n+1}} < 4$.

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\uparrow} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&> \left(\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right)^n \\&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $a_n < 4^{\frac{n}{n+1}} < 4$. 又显然 $a_n > 1$, 故 $\{a_n\}$ 是有界数列.

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\frac{n-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\uparrow} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\&> \left(\sqrt[n+1]{1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}\right)^n \\&= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $a_n < 4^{\frac{n}{n+1}} < 4$. 又显然 $a_n > 1$, 故 $\{a_n\}$ 是有界数列. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在. $\square$

Proof.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\
 &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\
 &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
 &= a_{n+1}
 \end{aligned}$$



Proof.

另一方面,

Proof.

另一方面,当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

Proof.

另一方面,当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛. 其极限记为 e , 称为自然对数的底.

Proof.

另一方面,当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \\ &\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛. 其极限记为 e , 称为自然对数的底.

经计算表明

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999 \dots$$

命题

令 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

命题

令 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n - 1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

命题

令 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n-1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

得

$$b_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = b_n,$$

命题

令 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n-1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

得

$$b_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减,

命题

令 $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\begin{aligned}\frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \left(\frac{n(n-1) + n}{n(n-1) + n-1} \right)^n \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1} \right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}\end{aligned}$$

得

$$b_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^n > \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e.$$

因此有不等式

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

定理

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

定理

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(这里 $x \in \mathbb{R}$.)

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形.

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$,

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$, 由 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$, 由 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$, 由 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

因已证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$, 由 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

因已证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 再利用夹逼原理, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Proof.

先考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的情形. 设 $x > 1$, 由 $[x] \leq x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}$$

因已证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, 再利用夹逼原理, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

类似可证

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$



法二.

当 $x < 0$ 时, 令 $y = -x$, 则

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\left(\frac{-y+1}{-y}\right)^{-1}\right)^y = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y\end{aligned}$$

法二.

当 $x < 0$ 时, 令 $y = -x$, 则

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(1 + \frac{1}{-y}\right)^{-y} = \left(\left(\frac{-y+1}{-y}\right)^{-1}\right)^y = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$. 故

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = e.$$



e

令

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!},$$

令

$$e_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!},$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$.

Proof.

在证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 序列的单调性过程中, 我们知道 $a_n < e_n, \forall n > 1$.

Proof.

在证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 序列的单调性过程中, 我们知道 $a_n < e_n, \forall n > 1$.

对任意固定的 $k > 1$, 当 $n > k$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}), \end{aligned}$$

Proof.

在证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 序列的单调性过程中, 我们知道 $a_n < e_n, \forall n > 1$.

对任意固定的 $k > 1$, 当 $n > k$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}), \end{aligned}$$

在上式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k.$$

Proof.

在证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 序列的单调性过程中, 我们知道 $a_n < e_n, \forall n > 1$.

对任意固定的 $k > 1$, 当 $n > k$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}), \end{aligned}$$

在上式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k.$$

由于 k 可以任意固定, 故我们有

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < e_n < e, \quad \forall n > 1.$$

Proof.

在证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 序列的单调性过程中, 我们知道 $a_n < e_n, \forall n > 1$.

对任意固定的 $k > 1$, 当 $n > k$ 时, 有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) \\ &> 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n}), \end{aligned}$$

在上式中, 令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = e_k.$$

由于 k 可以任意固定, 故我们有

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n < e_n < e, \quad \forall n > 1.$$

从而由夹逼原理, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$.

以e为底的指数函数和对数函数

定义

以 e 为基底的对数函数记为 $\ln x$.

命题

以 e 为底的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

命题

以 e 为底的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明.

命题

以 e 为底的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

命题

以 e 为底的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

命题

以 e 为底的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

因此, $e^x > 1 + x$ 对于 $x = \frac{1}{n}$ 成立.

命题

以 e 为底数的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

因此, $e^x > 1 + x$ 对于 $x = \frac{1}{n}$ 成立. 对右边不等式两边取 m 次方, 有

$$1 + m \cdot \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < e^{\frac{m}{n}}$$

命题

以 e 为底数的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

因此, $e^x > 1 + x$ 对于 $x = \frac{1}{n}$ 成立. 对右边不等式两边取 m 次方, 有

$$1 + m \cdot \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < e^{\frac{m}{n}}$$

其中第一个不等式是由 Bernoulli 不等式得出.

命题

以 e 为底数的指数函数 e^x 满足下面的不等式:

$$e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proof.

只需对 $x \geq -1$ 证明. $x = 0$ 时显然成立, 下设 $x = \frac{m}{n}$.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$$

因此, $e^x > 1 + x$ 对于 $x = \frac{1}{n}$ 成立. 对右边不等式两边取 m 次方, 有

$$1 + m \cdot \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m < e^{\frac{m}{n}}$$

其中第一个不等式是由 Bernoulli 不等式得出. 因此, $e^x > 1 + x$ 对于正有理数 $x = \frac{m}{n}$ 都成立. □

当 $x = -\frac{m}{n}$ 时, 我们首先证明

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right),$$

当 $x = -\frac{m}{n}$ 时, 我们首先证明

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right),$$

然后两边取 m 次方, 得

$$e^{-\frac{m}{n}} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m > 1 - \frac{m}{n}.$$

当 $x = -\frac{m}{n}$ 时, 我们首先证明

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right),$$

然后两边取 m 次方, 得

$$e^{-\frac{m}{n}} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m > 1 - \frac{m}{n}.$$

最后一个不等式也用到了 Bernoulli 不等式.

当 $x = -\frac{m}{n}$ 时, 我们首先证明

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right),$$

然后两边取 m 次方, 得

$$e^{-\frac{m}{n}} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m > 1 - \frac{m}{n}.$$

最后一个不等式也用到了 Bernoulli 不等式.

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
\Rightarrow & \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < e^{-1} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
\Rightarrow & \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
\Rightarrow & \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < e^{-1} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
\Rightarrow & \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} < e^{-\frac{1}{n}} < \frac{n}{n+1},
\end{aligned}$$

而

$$1 + \left(-\frac{1}{n}\right) < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

等价于

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

是严格单调递减数列, 故 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格单调递增数列.

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

是严格单调递减数列, 故 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格单调递增数列.

因此, 我们证明了

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right).$$

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

是严格单调递减数列, 故 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格单调递增数列.

因此, 我们证明了

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right).$$

当 x 是无理数时, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 收敛到 x .

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

是严格单调递减数列, 故 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格单调递增数列.

因此, 我们证明了

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right).$$

当 x 是无理数时, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 收敛到 x . 对于每个 r_n , 都有 $e^{r_n} > 1 + r_n$ 成立, 两边取极限, 即得 $e^x \geq 1 + x$ 成立.

注意到

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

是严格单调递减数列, 故 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ 是严格单调递增数列.

因此, 我们证明了

$$e^{-\frac{1}{n}} > 1 + \left(-\frac{1}{n}\right).$$

当 x 是无理数时, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 收敛到 x . 对于每个 r_n , 都有 $e^{r_n} > 1 + r_n$ 成立, 两边取极限, 即得 $e^x \geq 1 + x$ 成立.

思考: 对于无理数, 如何说明上面的等号不成立.

例子

例子

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

例子

例

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Proof.

上一节提到该极限通过变换 $y = \frac{1}{x}$, 在复合函数的极限法则下等于下面的重要极限

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y,$$

故证毕.



例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 0$, 故极限为 0.

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 0$, 故极限为 0. 下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$).)

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 0$, 故极限为 0. 下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$).) 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a[(1 + y)^{\frac{1}{y}}]} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \log_a[(1 + y)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 0$, 故极限为 0. 下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$).) 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

故特别地, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



例

设 $a > 0$, 研究函数 $\frac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 0$, 故极限为 0. 下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0$).) 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

故特别地, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

注

倒数第二个等号用到了复合运算的极限法则.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \text{ 且 } f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \text{ 且 } f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \log_a [\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \text{ 且 } f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \log_a [\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的. 但这里其实用到了复合函数极限运算的法则.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$.

$$\lim_{t \rightarrow e} f(t) = \lim_{t \rightarrow e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \text{ 且 } f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y \rightarrow 0} \log_a [(1 + y)^{\frac{1}{y}}] = \log_a [\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的. 但这里其实用到了复合函数极限运算的法则. 后面将说明这实际上也是函数 $\log_a x$ 连续性的表现.

注

注意: 这里不需要 $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e 这个条件.

注

注意: 这里不需要 $g(y) = (1 + y)^{\frac{1}{y}}$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e 这个条件.

我们解释 $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ 为何在 0 的某个空心邻域内不等于 e .

注

注意: 这里不需要 $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e 这个条件.

我们解释 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 为何在 0 的某个空心邻域内不等于 e .

当 $x > 0$ 时,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} < e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \ln(1+x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad \Leftrightarrow \quad 1+x < e^x$$

注

注意: 这里不需要 $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e 这个条件.

我们解释 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 为何在 0 的某个空心邻域内不等于 e .

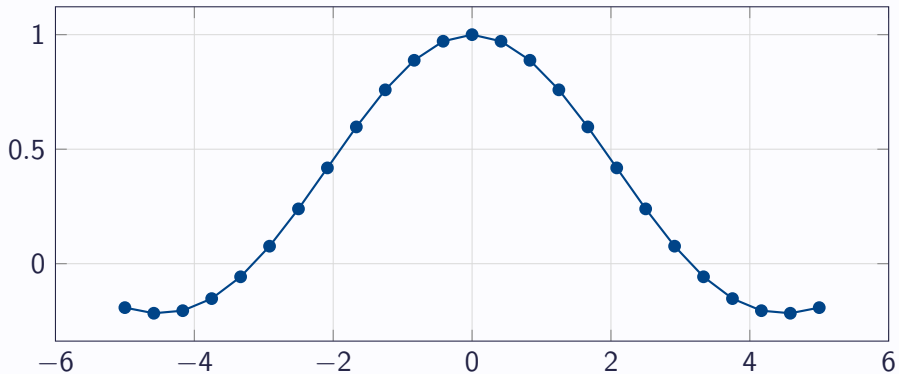
当 $x > 0$ 时,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} < e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \ln(1+x) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad \Leftrightarrow \quad 1+x < e^x$$

当 $x < 0$ 时,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} > e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \ln(1+x) > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1+x) < x \quad \Leftrightarrow \quad 1+x < e^x$$

$$\frac{\sin x}{x}$$



习题

习题

设 $\alpha > 0$, $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

习题

习题

设 $\alpha > 0$, $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

习题

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

习题

习题

设 $\alpha > 0$, $a > 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

习题

求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

习题

(1) 用归纳法证明 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n \geq nx$ ($x \geq -1$).

(2) 令 $x = -\frac{1}{(1+n)^2}$, 利用 Bernoulli 不等式证明 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ 的严格单调性.

Sowya 的使用

Sowya

下载

打印斐波那契数列

使用 `fibonacci()` 函数打印斐波那契数列的前 20 项.

打印斐波那契数列

使用 `fibonacci()` 函数打印斐波那契数列的前 20 项.

```
1 >> fibonacci(20,t)
2
3 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,
4
5 -----
6
7 F(20) = 6765
8
9 -----
```

打印斐波那契数列

使用 `fibonacci()` 函数打印斐波那契数列的前 20 项.

```
1 >> fibonacci(20,t)
2
3 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,
4
5 -----
6
7 F(20) = 6765
8
9 -----
```

这里第二个参数 `t` 也可以换成 `true` 或 `yes` 或 `y`.

打印递归数列

使用 `printRecursiveSeries()` 函数打印数列 $\{a_n \mid a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\}$ 的前 10 项.

打印递归数列

使用 `printRecursiveSeries()` 函数打印数列 $\{a_n \mid a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\}$ 的前 10 项.

```
1 >> :mode fraction
2
3 >> printRecursiveSeries(1/(1+a_n),a_n,1,10)
4 1|1,1|2,2|3,3|5,5|8,8|13,13|21,21|34,34|55,55|89,
5
6 -----
```

打印递归数列

使用 `printRecursiveSeries()` 函数打印数列 $\{a_n \mid a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\}$ 的前 10 项.

```
1 >> :mode fraction
2
3 >> printRecursiveSeries(1/(1+a_n),a_n,1,10)
4 1|1,1|2,2|3,3|5,5|8,8|13,13|21,21|34,34|55,55|89,
5
6 -----
```

注: 如果显示 `printRecursiveSeries()` 函数不存在, 则可以编程解决.

首先输入 `:mode clox` 进入编程模式.

```
1 >> :mode clox
```

首先输入 `:mode clox` 进入编程模式.

```
1 >> :mode clox
```

然后, 输入下面的代码. 这里定义了一个名为 `printSeries` 的函数, 接受一个参数 `N`, 表示打印的项数.

首先输入 `:mode clox` 进入编程模式.

```
1 >> :mode clox
```

然后, 输入下面的代码. 这里定义了一个名为 `printSeries` 的函数, 接受一个参数 `N`, 表示打印的项数. 函数定义使用关键字 `fun` 开头.

首先输入 `:mode clox` 进入编程模式.

```
1 >> :mode clox
```

然后, 输入下面的代码. 这里定义了一个名为 `printSeries` 的函数, 接受一个参数 `N`, 表示打印的项数. 函数定义使用关键字 `fun` 开头. 由于在命令行输入, 故先输入 `{`, 表示接受多行输入, 最后以 `}` 结束.

首先输入 :mode cloc 进入编程模式.

```
1 >> :mode cloc
```

然后, 输入下面的代码. 这里定义了一个名为 printSeries 的函数, 接受一个参数 N, 表示打印的项数. 函数定义使用关键字 fun 开头. 由于在命令行输入, 故先输入 {, 表示接受多行输入, 最后以 } 结束.

```
1 > {  
2 fun printSeries(N){  
3     var a_n=1;  
4     var k=1;  
5     while(k<=N){  
6         print a_n,", ";  
7         a_n=1/(1+a_n);  
8         k=k+1;  
9     }  
10 }  
11 }
```

调用该函数,

调用该函数,

```
1 > printSeries(10);  
2 > printSeries(10);  
3 1, 0.5, 0.66666667, 0.60000000, 0.625, 0.61538462, 0.61904762,  
   0.61764706, 0.61818182, 0.61797753, >
```

调用该函数,

```
1 > printSeries(10);  
2 > printSeries(10);  
3 1, 0.5, 0.66666667, 0.60000000, 0.625, 0.61538462, 0.61904762,  
   0.61764706, 0.61818182, 0.61797753, >
```

上面默认是数值计算. 输入 `setmode(1)`; 切换到分数计算模式.

调用该函数,

```
1 > printSeries(10);  
2 > printSeries(10);  
3 1, 0.5, 0.66666667, 0.60000000, 0.625, 0.61538462, 0.61904762,  
   0.61764706, 0.61818182, 0.61797753, >
```

上面默认是数值计算. 输入 `setmode(1)`; 切换到分数计算模式.

```
1 > setmode(1);  
2 > printSeries(10);  
3 1, 1|2, 2|3, 3|5, 5|8, 8|13, 13|21, 21|34, 34|55, 55|89, >
```

欢迎访问 atzjg.net