无穷小的比较

徐海峰整理

September 18, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

无穷小之间的比较

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x)$, $g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x)$, $g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的低阶无穷小量**;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷小量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷小量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷小量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷小量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷小量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**等价无穷小量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的低阶无穷小量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的同阶无穷小量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的等价无穷小量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;
- 设 $k > 0$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{|x-x_0|^k} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 即 $|f(x)| = O^*(|x-x_0|^k)$ $(x \to x_0)$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 是k **阶无穷小量**.

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷小量. 要比较它们收敛到零的速度哪个快, 可以作商后求极限.以下将 $f(x), g(x)$ 分别简记为 f, g.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的高阶无穷小量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的低阶无穷小量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的同阶无穷小量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g **的等价无穷小量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;
- 设 $k > 0$, 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{|x - x_0|^k} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 即 $|f(x)| = O^*(|x - x_0|^k)$ $(x \to x_0)$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 是k **阶无穷小量**.

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷大量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷大量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**等价无穷大量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;

设 $f(x)$, $g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷大量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**等价无穷大量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;
- 设 $k > 0$, 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{|x - x_0|^{-k}} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 即 $|f(x)| = O^*(|x - x_0|^{-k})$ $(x \to x_0)$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 是k **阶无穷大量**.

设 $f(x), g(x)$, 是同一过程 $x \to x_0$ 下的两个无穷大量. 要比较它们趋向∞的速度哪个快, 也作商后求极限.

定义

- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**低阶无穷大量**, 记作 $f(x) = o(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = \infty$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**高阶无穷大量**;
- 若 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的某个空心邻域内有界, 则记 $f(x) = O(g(x))$ $(x \to x_0)$;
- 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 则称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**同阶无穷大量**. 记作 $f(x) = O^*(g(x))$ $(x \to x_0)$;特别地, 当 $C = 1$ 时, 称当 $x \to x_0$ 时, f 是 g 的**等价无穷大量**, 记作 $f(x) \sim g(x)$ $(x \to x_0)$;
- 设 $k > 0$, 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{|x - x_0|^{-k}} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, 即 $|f(x)| = O^*(|x - x_0|^{-k})$ $(x \to x_0)$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 是k **阶无穷大量**.

注

设 $f(x), g(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小量（或无穷大量），它们之间量级的比较可以类似进行, 即作商后求极限.

例子

例

设 $n, m \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-m} = 0$, 故 x^n 是 x^m 在 $x \to 0$ 时的高阶无穷小.

例

设 $n,m\in\mathbb{Z}^+$, 当 $n>m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-m}=0$, 故 x^n 是 x^m 在 $x\to 0$ 时的高阶无穷小.反之, x^m 是 x^n 在 $x\to 0$ 时的低阶无穷小.

例

设 $n, m \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-m} = 0$, 故 x^n 是 x^m 在 $x \to 0$ 时的高阶无穷小.反之, x^m 是 x^n 在 $x \to 0$ 时的低阶无穷小.

注

n 比 m 大, 这也是起名**高阶**、**低阶**的最简单原因, 而不会起名**快无穷小**、**慢无穷小**. 收敛的快和慢体现在 x 的次数上. 通常我们都会先考虑多项式, 然后再考虑一般的函数, 让它们与熟悉的多项式进行比较.

例子

例

设 $n, m \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-m} = 0$, 故 x^n 是 x^m 在 $x \to 0$ 时的高阶无穷小.反之, x^m 是 x^n 在 $x \to 0$ 时的低阶无穷小.

注

n 比 m 大, 这也是起名**高阶**、**低阶**的最简单原因, 而不会起名**快无穷小**、**慢无穷小**. 收敛的快和慢体现在 x 的次数上. 通常我们都会先考虑多项式, 然后再考虑一般的函数, 让它们与熟悉的多项式进行比较.

例

由于 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 故 $\sin x$ 是 x 在 $x \to 0$ 时的等价无穷小. 即 $\sin x \sim x, (x \to 0)$.

例子

例

由于 $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, 故 $1 - \cos x$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小.

例

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 故 $1-\cos x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小.

又已证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 故 $1-\cos x$ 是 x^2 在 $x\to 0$ 时的同阶（非等价）无穷小.

例子

例

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, 故 $1-\cos x$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小.

又已证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, 故 $1-\cos x$ 是 x^2 在 $x\to 0$ 时的同阶（非等价）无穷小.

例

证明: $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x,\ (x\to 0)$.

Proof.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}=1.$$

□

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

Proof.

记 $t=\sqrt[n]{1+x}$, 则 $x=t^n-1$.

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

Proof.

记 $t=\sqrt[n]{1+x}$, 则 $x=t^n-1$.当 $x\to 0$ 时, $t\to 1$.

前面已经证明 $\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim \dfrac{1}{n}x$.

Proof.

记 $t=\sqrt[n]{1+x}$, 则 $x=t^n-1$.当 $x\to 0$ 时, $t\to 1$.

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\frac{t-1}{\frac{1}{n}(t^n-1)}=\frac{n(t-1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}$$

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

Proof.

记 $t=\sqrt[n]{1+x}$, 则 $x=t^n-1$.当 $x\to 0$ 时, $t\to 1$.

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\frac{t-1}{\frac{1}{n}(t^n-1)}=\frac{n(t-1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{t\to 1}\frac{n}{t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1}=\frac{n}{n}=1.$$

前面已经证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例

证明: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

Proof.

记 $t=\sqrt[n]{1+x}$, 则 $x=t^n-1$.当 $x\to 0$ 时, $t\to 1$.

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\frac{t-1}{\frac{1}{n}(t^n-1)}=\frac{n(t-1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{t\to 1}\frac{n}{t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1}=\frac{n}{n}=1.$$

故 $\sqrt[n]{1+x}-1$ 和 $\dfrac{1}{n}x$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小. $\square$

无穷小的等价代换

等价代换

定理

设 $x \to x_0$ 时, $f \sim f_1$, $g \sim g_1$. 若 $\dfrac{f_1}{g_1}$ 在 x_0 处有极限, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 处有极限, 且两极限相等; 反之亦然.

等价代换

定理

设 $x \to x_0$ 时, $f \sim f_1$, $g \sim g_1$. 若 $\dfrac{f_1}{g_1}$ 在 x_0 处有极限, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 处有极限, 且两极限相等; 反之亦然.

Proof.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{f_1}\cdot\frac{f_1}{g_1}\cdot\frac{g_1}{g}\right]$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g_1}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}.$$

□

等价代换

定理

设 $x \to x_0$ 时, $f \sim f_1$, $g \sim g_1$. 若 $\dfrac{f_1}{g_1}$ 在 x_0 处有极限, 则 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 处有极限, 且两极限相等; 反之亦然.

Proof.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g} &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f}{f_1}\cdot\frac{f_1}{g_1}\cdot\frac{g_1}{g}\right] \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f}{f_1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g_1}{g} = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1}{g_1}.\end{aligned}$$

$\square$

注: 等价代换在无穷远处也可进行.

例

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

例

例

求极限 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解. 当 $x \to 0$ 时,

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) \ \sim \ x(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^3,$$

例

例

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解. 当 $x \to 0$ 时,

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) \sim x(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^3,$$

故

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

∎

常用的等价无穷小

- $\sin x \sim x \ (x \to 0)$
- $\tan x \sim x \ (x \to 0)$
- $\arcsin x \sim x \ (x \to 0)$
- $\arctan x \sim x \ (x \to 0)$
- $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x \ (x \to 0)$
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x \ (x \to 0)$
- $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 \ (x \to 0)$
- $\ln(\cos x) \sim -\dfrac{1}{2}x^2 \ (x \to 0)$
- $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3 \ (x \to 0)$
- $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$
- $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Proof.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \to \ln e = 1 \quad (x \to 0).$$

$\square$

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Proof.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \to \ln e = 1 \quad (x \to 0).$$

$\square$

这里用到了复合函数的极限法则.

- $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \ (x \to 0)$.

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Proof.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \to \ln e = 1 \quad (x \to 0).$$

□

这里用到了复合函数的极限法则.

- $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \ (x \to 0)$.
- $f(y) = \ln y \to \ln e \ (y \to e)$.

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Proof.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \to \ln e = 1 \quad (x \to 0).$$

□

这里用到了复合函数的极限法则.

- $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \ (x \to 0)$.
- $f(y) = \ln y \to \ln e \ (y \to e)$.
- $g(x)$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e.

例

证明: $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Proof.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] \to \ln e = 1 \quad (x \to 0).$$

□

这里用到了复合函数的极限法则.

- $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \ (x \to 0)$.
- $f(y) = \ln y \to \ln e \ (y \to e)$.
- $g(x)$ 在 0 的某个空心邻域内不等于 e.

以后碰到类似的不再强调利用了复合函数的极限法则. 特别是最后一条.