逆映射定理和隐映射定理

徐海峰整理

March 19, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

回顾

对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微.

对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微.

命题 (反函数求导法则)

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 如果 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微.

命题 (反函数求导法则)

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 如果 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这里, 可微性和导数非零保证了函数在局部上与可逆线性函数有好的逼近, 因而也是（局部）可逆的.

对于一元函数, 如果它可微且导数处处非零, 则该函数可逆且其逆仍可微.

命题 (反函数求导法则)

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 如果 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

这里, 可微性和导数非零保证了函数在局部上与可逆线性函数有好的逼近, 因而也是（局部）可逆的.

下面我们考虑多元向量值函数类似的问题.

逆映射定理

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

这推出 $(1 - \|B\|) \cdot \|v\| \leqslant 0$,

例

由线性代数, 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

这推出 $(1 - \|B\|) \cdot \|v\| \leqslant 0$,而 $\|B\| < 1$, 故 $v = 0$.

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

这推出 $(1 - \|B\|) \cdot \|v\| \leqslant 0$,而 $\|B\| < 1$, 故 $v = 0$.

这个例子意味着, **对恒同映射这样一个可逆映射作一个小扰动后仍是一个可逆映射.**

可逆线性映射

例

由线性代数, 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

这推出 $(1 - \|B\|) \cdot \|v\| \leqslant 0$,而 $\|B\| < 1$, 故 $v = 0$.

这个例子意味着, **对恒同映射这样一个可逆映射作一个小扰动后仍是一个可逆映射.**一般地, **任何可逆线性映射在微扰下仍为可逆映射.**

例

由线性代数, 线性映射 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A\neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\|<1$, 则 I_n-B 可逆.

事实上, 设 $(I_n-B)v=0$, 则

$$\|v\|=\|I_nv\|=\|Bv\|\leqslant\|B\|\cdot\|v\|,$$

这推出 $(1-\|B\|)\cdot\|v\|\leqslant 0$,而 $\|B\|<1$, 故 $v=0$.

这个例子意味着, **对恒同映射这样一个可逆映射作一个小扰动后仍是一个可逆映射.**一般地, **任何可逆线性映射在微扰下仍为可逆映射.**因为可微映射在局部上可以看成是其微分的平移加上微小扰动, 当微分可逆时, 该映射在局部上也应该是可逆的.

例

由线性代数, 线性映射 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 可逆当且仅当 $\det A \neq 0$, 即 A 为单射.我们有如下观察:

如果 $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射, $\|B\| < 1$, 则 $I_n - B$ 可逆.

事实上, 设 $(I_n - B)v = 0$, 则

$$\|v\| = \|I_n v\| = \|Bv\| \leqslant \|B\| \cdot \|v\|,$$

这推出 $(1 - \|B\|) \cdot \|v\| \leqslant 0$,而 $\|B\| < 1$, 故 $v = 0$.

这个例子意味着, **对恒同映射这样一个可逆映射作一个小扰动后仍是一个可逆映射.** 一般地, **任何可逆线性映射在微扰下仍为可逆映射.** 因为可微映射在局部上可以看成是其微分的平移加上微小扰动, 当微分可逆时, 该映射在局部上也应该是可逆的.这个想法是正确的, 见下面的重要结果.

逆映射定理

定理

设 W 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $f: W \to \mathbb{R}^n$ 为 C^k $(k \leqslant 1)$ 映射, $x^0 \in W$. 如果 $\det Jf(x^0) \neq 0$, 则存在 x^0 的开邻域 $U \subset W$ 以及 $y^0 = f(x^0)$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f|_U: U \to V$ 是可逆映射, 且其逆仍为 C^k 映射.

定理

设 W 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $f: W \to \mathbb{R}^n$ 为 C^k $(k \leqslant 1)$ 映射, $x^0 \in W$. 如果 $\det Jf(x^0) \neq 0$, 则存在 x^0 的开邻域 $U \subset W$ 以及 $y^0 = f(x^0)$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f|_U : U \to V$ 是可逆映射, 且其逆仍为 C^k 映射.

Proof.

不失一般性, 可设 $x^0 = 0$, $y^0 = f(x^0) = 0$. 以 A 记 f 在 $x^0 = 0$ 处的微分, 则 A 可逆, 且 $f \circ A^{-1}$ 在 0 处微分为恒同映射.

定理

设 W 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $f: W \to \mathbb{R}^n$ 为 C^k $(k \leqslant 1)$ 映射, $x^0 \in W$. 如果 $\det Jf(x^0) \neq 0$, 则存在 x^0 的开邻域 $U \subset W$ 以及 $y^0 = f(x^0)$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f|_U : U \to V$ 是可逆映射, 且其逆仍为 C^k 映射.

Proof.

不失一般性, 可设 $x^0 = 0$, $y^0 = f(x^0) = 0$. 以 A 记 f 在 $x^0 = 0$ 处的微分, 则 A 可逆, 且 $f \circ A^{-1}$ 在 0 处微分为恒同映射.如果欲证结论对 $f \circ A^{-1}$ 成立, 则对 f 也成立.

定理

设 W 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $f: W \to \mathbb{R}^n$ 为 C^k $(k \leqslant 1)$ 映射, $x^0 \in W$. 如果 $\det Jf(x^0) \neq 0$, 则存在 x^0 的开邻域 $U \subset W$ 以及 $y^0 = f(x^0)$ 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $f|_U: U \to V$ 是可逆映射, 且其逆仍为 C^k 映射.

Proof.

不失一般性, 可设 $x^0 = 0$, $y^0 = f(x^0) = 0$. 以 A 记 f 在 $x^0 = 0$ 处的微分, 则 A 可逆, 且 $f \circ A^{-1}$ 在 0 处微分为恒同映射.如果欲证结论对 $f \circ A^{-1}$ 成立, 则对 f 也成立.因此, 不妨从一开始就假设 $Jf(x^0) = I_n$. $\square$

Proof.

在 x^0 附近, f 是恒同映射的微小扰动, 扰动项可定义为映射

$$
\begin{aligned}
g: W &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto f(x) - x,
\end{aligned}
$$

Proof.

在 x^0 附近, f 是恒同映射的微小扰动, 扰动项可定义为映射

$$\begin{aligned} g: W &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) - x, \end{aligned}$$

则 g 为 C^k 映射, 且 $Jg(0) = 0$.

Proof.

在 x^0 附近, f 是恒同映射的微小扰动, 扰动项可定义为映射

$$\begin{aligned} g:\ W &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) - x, \end{aligned}$$

则 g 为 C^k 映射, 且 $Jg(0) = 0$.因此, 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得

$$\|Jg(x)\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall\, x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \subset W.$$

Proof.

在 x^0 附近, f 是恒同映射的微小扰动, 扰动项可定义为映射

$$\begin{aligned} g:\ W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x)-x, \end{aligned}$$

则 g 为 C^k 映射, 且 $Jg(0)=0$.因此, 存在 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$\|Jg(x)\| \leqslant \frac{1}{2}, \quad \forall\ x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \subset W.$$

由拟微分中值定理, $\forall\ x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$, 存在 $\xi \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$, 使得

$$\begin{aligned} \|g(x_1)-g(x_2)\| &\leqslant \|Jg(\xi)\| \cdot \|x_1-x_2\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|. \end{aligned}$$

□

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.我们利用**压缩映像原理**来找这样的不动点.

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.我们利用**压缩映像原理**来找这样的不动点.首先,

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &= \|y - g(x)\| \leqslant \|y\| + \|g(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.我们利用压**缩映像原理**来找这样的不动点.首先,

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &= \|y - g(x)\| \leqslant \|y\| + \|g(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned} \tag{2}$$

其次, $g_y : \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \to B_{\varepsilon_0}(0) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ 是压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0).$$

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.我们利用压**缩映像原理**来找这样的不动点.首先,

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &= \|y - g(x)\| \leqslant \|y\| + \|g(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned} \tag{2}$$

其次, $g_y : \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \to B_{\varepsilon_0}(0) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ 是压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0).$$

从而 (1) 在 $\bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ 中有惟一解, 记为 x_y.

Proof.

为说明 f 在 0 附近可逆, 给定 $y \in \bar{B}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)$, 我们来解方程

$$f(x) = y, \quad x \in B_{\varepsilon_0}(0). \tag{1}$$

这等价于在 $B_{\varepsilon_0}(0)$ 中寻找 $g_y(x) = x + y - f(x) = y - g(x)$ 的不动点.我们利用**压缩映像原理**来找这样的不动点.首先,

$$\begin{aligned} \|g_y(x)\| &= \|y - g(x)\| \leqslant \|y\| + \|g(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{1}{2}\|x\| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0, \quad x \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0). \end{aligned} \tag{2}$$

其次, $g_y : \bar{B}_{\varepsilon_0}(0) \to B_{\varepsilon_0}(0) \subset \bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ 是压缩映射:

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| = \|g(x_2) - g(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(0).$$

从而 (1) 在 $\bar{B}_{\varepsilon_0}(0)$ 中有惟一解, 记为 x_y.由 (2), $x_y \in B_{\varepsilon_0}(0)$. $\square$

Proof.

记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U : U \to V$ 是一一映射, 其逆映射 $h : V \to U$, $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{3}$$

Proof.

记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U: U \to V$ 是一一映射, 其逆映射 $h: V \to U$, $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{3}$$

并且 $h: V \to U$ 是 C^k 映射.

Proof.

记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U : U \to V$ 是一一映射, 其逆映射 $h : V \to U$, $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{3}$$

并且 $h : V \to U$ 是 C^k 映射.我们逐步证明.

(1) $h : V \to U$ **是连续映射:**

Proof.

记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U : U \to V$ 是一一映射, 其逆映射 $h : V \to U$, $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{3}$$

并且 $h : V \to U$ 是 C^k 映射.我们逐步证明.

(1) $h : V \to U$ **是连续映射:**当 $y_1, y_2 \in V$ 时,

$$\begin{aligned}\|h(y_1) - h(y_2)\| &= \|(y_1 - g(h(y_1))) - (y_2 - g(h(y_2)))\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|h(y_1) - h(y_2)\|,\end{aligned}$$

Proof.

记

$$U = f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0)) \cap B_{\varepsilon_0}(0), \quad V = B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(0),$$

则我们已经证明了 $f|_U: U \to V$ 是**一一**映射, 其逆映射 $h: V \to U$, $h(y) = x_y$ 满足

$$y - g(h(y)) = h(y). \tag{3}$$

并且 $h: V \to U$ 是 C^k 映射.我们逐步证明.

(1) $h: V \to U$ **是连续映射:**当 $y_1, y_2 \in V$ 时,

$$\begin{aligned}\|h(y_1) - h(y_2)\| &= \|(y_1 - g(h(y_1))) - (y_2 - g(h(y_2)))\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \|g(h(y_1)) - g(h(y_2))\| \\ &\leqslant \|y_1 - y_2\| + \frac{1}{2}\|h(y_1) - h(y_2)\|,\end{aligned}$$

这说明 $\|h(y_1) - h(y_2)\| \leqslant 2\|y_1 - y_2\|, \forall\, y_1, y_2 \in V$. □

Proof.

(2) $h: V \to U$ **是可微映射:**

Proof.

(2) $h: V \to U$ **是可微映射:**由于 g 为 C^k 映射, 设 $y_0 \in V$, 则对 $y \in V$, 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|). \end{aligned}$$

Proof.

(2) $h: V \to U$ **是可微映射:**由于 g 为 C^k 映射, 设 $y_0 \in V$, 则对 $y \in V$, 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|). \end{aligned}$$

利用 $Jf = I_n + Jg$ 和 (1), 上式可改写为

$$Jf(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) = (y - y_0) + o(\|h(y) - h(y_0)\|),$$

因而

$$h(y) - h(y_0) = [Jf(h(y_0))]^{-1} \cdot (y - y_0) + o(\|h(y) - h(y_0)\|).$$

Proof.

(2) $h: V \to U$ **是可微映射:**由于 g 为 C^k 映射, 设 $y_0 \in V$, 则对 $y \in V$, 有

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|). \end{aligned}$$

利用 $Jf = I_n + Jg$ 和 (1), 上式可改写为

$$Jf(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) = (y - y_0) + o(\|h(y) - h(y_0)\|),$$

因而

$$h(y) - h(y_0) = [Jf(h(y_0))]^{-1} \cdot (y - y_0) + o(\|h(y) - h(y_0)\|).$$

这说明 h 在 y_0 处可微. □

备注

上面的证明来自于梅《数学分析》第二版.

备注

上面的证明来自于梅《数学分析》第二版.

$$\begin{aligned} h(y) - h(y_0) &= (y - y_0) - [g(h(y)) - g(h(y_0))] \\ &= (y - y_0) - Jg(h(y_0)) \cdot (h(y) - h(y_0)) + o(\|h(y) - h(y_0)\|). \end{aligned} \tag{*}$$

可写为

$$[I_n + Jg(h(y_0))](h(y) - h(y_0)) = (y - y_0) + o(\|h(y) - h(y_0)\|).$$

备注

上面的证明来自于梅《数学分析》第二版.

$$\begin{aligned} h(y)-h(y_0) &= (y-y_0)-[g(h(y))-g(h(y_0))] \\ &= (y-y_0)-Jg(h(y_0))\cdot(h(y)-h(y_0))+o(\|h(y)-h(y_0)\|). \end{aligned} \tag{*}$$

可写为

$$[I_n+Jg(h(y_0))](h(y)-h(y_0))=(y-y_0)+o(\|h(y)-h(y_0)\|).$$

由于 $f(x)=x+g(x)$, 故 $Jf=I_n+Jg$. 假设 $h(y_0)=x_0$, 则

$$Jf(h(y_0))=Jf(x_0)=I_n+Jg(x_0)=I_n+Jg(h(y_0)).$$

这里用到了 $h: V\to U$ 是连续映射, 当 $y, y_0\in V=B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 时, $h(y), h(y_0)\in U$, 从而上面的 $(*)$ 式成立.

Proof.

(3) $h: V \to U$ 是 C^k 映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall\, y \in V. \tag{1}$$

Proof.

(3) $h\colon V \to U$ 是 C^k 映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall\, y \in V. \tag{1}$$

由 $f \in C^k$ 知 $Jf \in C^{k-1}$.

Proof.

(3) $h\colon V \to U$ 是 C^k 映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall\, y \in V. \tag{1}$$

由 $f \in C^k$ 知 $Jf \in C^{k-1}$.由 h 可微及上式可推出 $Jh \in C^0$, 即 $h \in C^1$.

Proof.

(3) $h: V \to U$ 是 C^k 映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall\, y \in V. \tag{1}$$

由 $f \in C^k$ 知 $Jf \in C^{k-1}$.由 h 可微及上式可推出 $Jh \in C^0$, 即 $h \in C^1$.

再由 $Jf \in C^{k-1}$, $h \in C^1$ 及上式可推出 $Jh \in C^1$, 即 $h \in C^2$.

Proof.

(3) $h: V \to U$ 是 C^k 映射.

由 (2) 的证明知

$$Jh(y) = [Jf(h(y))]^{-1}, \quad \forall\, y \in V. \tag{1}$$

由 $f \in C^k$ 知 $Jf \in C^{k-1}$.由 h 可微及上式可推出 $Jh \in C^0$, 即 $h \in C^1$.

再由 $Jf \in C^{k-1}$, $h \in C^1$ 及上式可推出 $Jh \in C^1$, 即 $h \in C^2$.依次类推, 最后我们得到 $h \in C^k$.

□

关于压缩映像原理

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x) = y$.

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x) = y$.所谓迭代就是先取一个近似解 x_k, 再令

$$x_{k+1} = x_k + y - f(x_k),$$

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x) = y$.所谓迭代就是先取一个近似解 x_k, 再令

$$x_{k+1} = x_k + y - f(x_k),$$

这样可以得到一列近似解, 如果它们收敛, 则其极限就是真正的解.

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x)=y$.所谓迭代就是先取一个近似解 x_k, 再令

$$x_{k+1}=x_k+y-f(x_k),$$

这样可以得到一列近似解, 如果它们收敛, 则其极限就是真正的解.也可以用所谓的 Newton 迭代解方程:

$$x_{k+1}=x_k+[Jf(x_k)]^{-1}(y-f(x_k)),$$

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x) = y$.所谓迭代就是先取一个近似解 x_k, 再令

$$x_{k+1} = x_k + y - f(x_k),$$

这样可以得到一列近似解, 如果它们收敛, 则其极限就是真正的解.也可以用所谓的 Newton 迭代解方程:

$$x_{k+1} = x_k + [Jf(x_k)]^{-1}(y - f(x_k)),$$

可以证明, 在一定条件下, 迭代出来的点列确实收敛于真正的解.

注

用压缩映像原理找不动点其实是通过迭代来实现的.

比如, 给定 y, 我们要解方程 $f(x) = y$.所谓迭代就是先取一个近似解 x_k, 再令

$$x_{k+1} = x_k + y - f(x_k),$$

这样可以得到一列近似解, 如果它们收敛, 则其极限就是真正的解.也可以用所谓的 Newton 迭代解方程:

$$x_{k+1} = x_k + [Jf(x_k)]^{-1}(y - f(x_k)),$$

可以证明, 在一定条件下, 迭代出来的点列确实收敛于真正的解.

需要指出的是, 多元函数的反函数定理中逆映射只有局部存在性, 这与一元函数不同.

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. 显然, f 不是单射, 但

$$\det Jf(x,y)=\det\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}=e^{2x}\neq 0.$$

这说明**逆映射定理的结论只能局部成立**, 这跟一元函数的情形不同!

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)$. 显然, f 不是单射, 但

$$\det Jf(x,y)=\det\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix}=e^{2x}\neq 0.$$

这说明**逆映射定理的结论只能局部成立**, 这跟一元函数的情形不同!

Proof.

$$f(x,y)=(e^x\cos y, e^x\sin y)=(e^x\cos(y+2k\pi), e^x\sin(y+2k\pi))=f(x,y+2k\pi),$$

故 f 不是单射. $\square$

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

Proof.

设 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, 则 $(x_1^3,y_1^3)=(x_2^3,y_2^3)$, 这推出 $x_1^3=x_2^3$, $y_1^3=y_2^3$. 由于 x_1,x_2,y_1,y_2 都是实数, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 即 f 是单射.

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

Proof.

设 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, 则 $(x_1^3,y_1^3)=(x_2^3,y_2^3)$, 这推出 $x_1^3=x_2^3$, $y_1^3=y_2^3$. 由于 x_1,x_2,y_1,y_2 都是实数, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 即 f 是单射.由于 $y=x^3$ 是满射, 故这里的 f 也是满射.

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

Proof.

设 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, 则 $(x_1^3,y_1^3)=(x_2^3,y_2^3)$, 这推出 $x_1^3=x_2^3$, $y_1^3=y_2^3$. 由于 x_1,x_2,y_1,y_2 都是实数, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 即 f 是单射.由于 $y=x^3$ 是满射, 故这里的 f 也是满射.f 是光滑映射是因为 f 的每个分量都是光滑函数.

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

Proof.

设 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, 则 $(x_1^3,y_1^3)=(x_2^3,y_2^3)$, 这推出 $x_1^3=x_2^3$, $y_1^3=y_2^3$. 由于 x_1,x_2,y_1,y_2 都是实数, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 即 f 是单射.由于 $y=x^3$ 是满射, 故这里的 f 也是满射.f 是光滑映射是因为 f 的每个分量都是光滑函数.但是

$$f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(x^{\frac{1}{3}},y^{\frac{1}{3}}),$$

不可微, 因为其分量函数 $x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$ 在原点处不可微. □

例

考虑 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x^3,y^3)$, 则 f 为光滑单射, 也是满射, 但 $Jf(0,0)=0$, f 的逆映射不可微.

Proof.

设 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, 则 $(x_1^3,y_1^3)=(x_2^3,y_2^3)$, 这推出 $x_1^3=x_2^3$, $y_1^3=y_2^3$. 由于 x_1,x_2,y_1,y_2 都是实数, 故 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. 即 f 是单射.由于 $y=x^3$ 是满射, 故这里的 f 也是满射.f 是光滑映射是因为 f 的每个分量都是光滑函数.但是

$$f^{-1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad (x,y)\mapsto(x^{\frac{1}{3}},y^{\frac{1}{3}}),$$

不可微, 因为其分量函数 $x\mapsto x^{\frac{1}{3}}$ 在原点处不可微. □

这说明 Jacobian 非退化的条件不能去掉.

例

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $f(x^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, 在 (x^0,y^0) 附近解方程

$$f(x,y)=0.$$

例

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $f(x^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, 在 (x^0,y^0) 附近解方程

$$f(x,y)=0.$$

解. 令 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x,f(x,y))$, 则 $F(x^0,y^0)=(x^0,0)$, 且

$$\det JF(x^0,y^0)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0.$$

例

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $f(x^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, 在 (x^0,y^0) 附近解方程

$$f(x,y)=0.$$

解. 令 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x,f(x,y))$, 则 $F(x^0,y^0)=(x^0,0)$, 且

$$\det JF(x^0,y^0)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0.$$

由逆映射定理, 在 (x^0,y^0) 附近 F 为可逆映射.

例

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $f(x^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, 在 (x^0,y^0) 附近解方程

$$f(x,y)=0.$$

解. 令 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x,f(x,y))$, 则 $F(x^0,y^0)=(x^0,0)$, 且

$$\det JF(x^0,y^0)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0.$$

由逆映射定理, 在 (x^0,y^0) 附近 F 为可逆映射.于是当 x 在 x^0 附近时, y^0 附近存在 $g(x)$, 使得 $F(x,g(x))=(x,0)$, 即 $f(x,g(x))=0$.

例

设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 为 C^k $(k\geqslant 1)$ 映射, $f(x^0,y^0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0$, 在 (x^0,y^0) 附近解方程

$$f(x,y)=0.$$

解. 令 $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x,f(x,y))$, 则 $F(x^0,y^0)=(x^0,0)$, 且

$$\det JF(x^0,y^0)=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial f}{\partial x}(x^0,y^0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial y}(x^0,y^0)\neq 0.$$

由逆映射定理, 在 (x^0,y^0) 附近 F 为可逆映射.于是当 x 在 x^0 附近时, y^0 附近存在 $g(x)$, 使得 $F(x,g(x))=(x,0)$, 即 $f(x,g(x))=0$.对 x 求导得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))\cdot g'(x)=0,$$

∎

解. 从而

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

解. 从而

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

$y = g(x)$ 称为由 $f(x, y) = 0$ 决定的**隐函数**. ∎

解. 从而

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

$y = g(x)$ 称为由 $f(x, y) = 0$ 决定的**隐函数**. ∎

上例可推广到一般维数, 所得结果称为**隐映射（隐函数）定理**.

隐映射定理

定理 (隐映射定理)

设 W 为 $\mathbb{R}^{n+m}$ 中开集, W 中的点用 (x, y) 表示, 其中 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. $f : W \to \mathbb{R}^m$ 为 C^k 映射,

$$f(x, y) = (f_1(x, y),\ f_2(x, y),\ \ldots,\ f_m(x, y)).$$

设 $(x^0, y^0) \in W$, $f(x^0, y^0) = 0$ 且 $\det Jf_y(x^0, y^0) \neq 0$, 其中

$$Jf_y(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)\right)_{m\times m}.$$

则存在 x^0 的开邻域 $V \subset \mathbb{R}^n$, 以及惟一的 C^k 映射 $g : V \to \mathbb{R}^m$, 使得

- *(1)* $y^0 = g(x^0)$, $f(x, g(x)) = 0$, $\forall\, x \in V$.
- *(2)* $Jg(x) = -[Jf_y(x, g(x))]^{-1} Jf_x(x, g(x))$,

其中 $Jf_x(x, y) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$

隐映射定理的证明

Proof.

令 $F: W \to \mathbb{R}^{n+m}$ 为

$$F(x, y) = (x, f(x, y)),$$

在 (x^0, y^0) 处利用逆映射定理即可. □

Lists

Items

- Milk
- Eggs
- Potatoes

Enumerations

1. First,
2. Second and
3. Last.

Descriptions

PowerPoint Meeh.

Beamer Yeeeha.

Tables

Table 1: Largest cities in the world (source: Wikipedia)

City	Population
Mexico City	20,116,842
Shanghai	19,210,000
Peking	15,796,450
Istanbul	14,160,467

Blocks

Three different block environments are pre-defined and may be styled with an optional background color.

Default

Block content.

Alert

Block content.

Example

Block content.

Default

Block content.

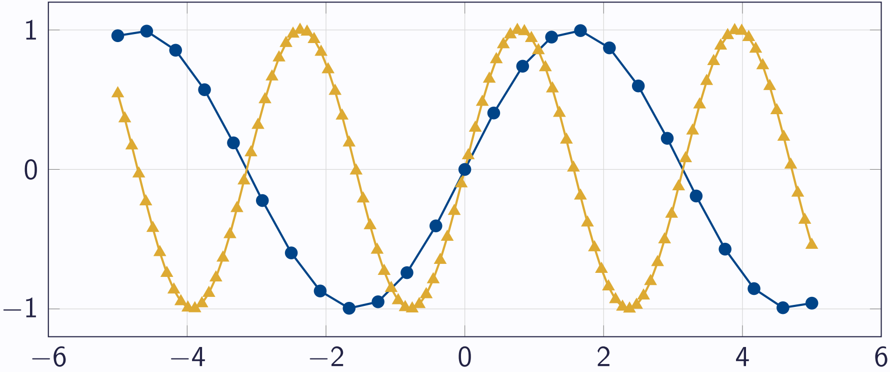
Alert

Block content.

Example

Block content.

Line plots



Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.