多元函数的积分

徐海峰整理

April 2, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

二重 Riemann 积分

矩形区域的分割

设 $[a, b]$, $[c, d]$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的区间, 则 $\mathbb{I} = [a, b] \times [c, d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形, 其直径$d(\mathbb{I})$ 和面积 $v(\mathbb{I})$ 分别为

$$d(\mathbb{I}) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}, \quad v(\mathbb{I}) = (b-a)(d-c).$$

矩形区域的分割

设 $[a, b]$, $[c, d]$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的区间, 则 $\mathbb{I} = [a, b] \times [c, d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形, 其直径$d(\mathbb{I})$ 和面积 $v(\mathbb{I})$ 分别为

$$d(\mathbb{I}) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}, \quad v(\mathbb{I}) = (b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

矩形区域的分割

设 $[a, b]$, $[c, d]$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的区间, 则 $\mathbb{I} = [a, b] \times [c, d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形, 其直径$d(\mathbb{I})$ 和面积 $v(\mathbb{I})$ 分别为

$$d(\mathbb{I}) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}, \quad v(\mathbb{I}) = (b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \pi_2: \ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d,$$

则直线 $x = x_i \ (0 \leqslant i \leqslant m)$ 和 $y = y_j \ (0 \leqslant j \leqslant n)$ 将 I 分成 nm 个小矩形

$$\mathbb{I}_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (1 \leqslant i \leqslant m, \ 1 \leqslant j \leqslant n),$$

设 $[a,b]$, $[c,d]$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的区间, 则 $\mathbb{I}=[a,b]\times[c,d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形, 其直径$d(\mathbb{I})$ 和面积 $v(\mathbb{I})$ 分别为

$$d(\mathbb{I})=\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2},\quad v(\mathbb{I})=(b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\quad \pi_2:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d,$$

则直线 $x=x_i$ $(0\leqslant i\leqslant m)$ 和 $y=y_j$ $(0\leqslant j\leqslant n)$ 将 I 分成 nm 个小矩形

$$\mathbb{I}_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n),$$

这些区间的分点连同小矩形称为 $\mathbb{I}$ 的**一个分割**, 记为 $\pi=\pi_1\times\pi_2$.

矩形区域的分割

设 $[a,b]$, $[c,d]$ 分别为 $\mathbb{R}$ 上的区间, 则 $\mathbb{I}=[a,b]\times[c,d]$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的矩形, 其直径$d(\mathbb{I})$ 和面积 $v(\mathbb{I})$ 分别为

$$d(\mathbb{I})=\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2},\quad v(\mathbb{I})=(b-a)(d-c).$$

设这两个区间分别有分割

$$\pi_1:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\quad \pi_2:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d,$$

则直线 $x=x_i$ $(0\leqslant i\leqslant m)$ 和 $y=y_j$ $(0\leqslant j\leqslant n)$ 将 I 分成 nm 个小矩形

$$\mathbb{I}_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\quad(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n),$$

这些区间的分点连同小矩形称为 $\mathbb{I}$ 的**一个分割**, 记为 $\pi=\pi_1\times\pi_2$.分割 π 的模定义为 $\|\pi\|=\max_{i,j}d(\mathbb{I}_{ij})$.

矩形上的积分

定义

假设 $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ 为矩形 $\mathbb{I}$ 上定义的函数, 如果存在实数 A, 使得任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, 有

$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(\mathbb{I}_{ij}) - A\right| < \varepsilon, \quad \forall\, \xi_{ij} \in \mathbb{I}_{ij},$$

则称 f 在 $\mathbb{I}$ 上 **Riemann 可积**或简称**可积**, A 为 f 在 $\mathbb{I}$ 上的**积分**, 记为

$$A = \int_{\mathbb{I}} f = \iint_{\mathbb{I}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注

称 $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(\mathbb{I}_{ij})$ 为 f 关于分割 π 的一个 **Riemann 和**, 也记为 $S(f,\pi,\xi)$.

注

称 $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(\mathbb{I}_{ij})$ 为 f 关于分割 π 的一个 **Riemann 和**, 也记为 $S(f,\pi,\xi)$.如果 f 可积, 则积分可用极限表示

$$\int_{\mathbb{I}} f = \lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi,\xi).$$

注

称 $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(\mathbb{I}_{ij})$ 为 f 关于分割 π 的一个 **Riemann 和**, 也记为 $S(f,\pi,\xi)$.如果 f 可积, 则积分可用极限表示

$$\int_{\mathbb{I}} f = \lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi,\xi).$$

注

与一元函数类似, f 在 $\mathbb{I}$ 上 Riemann 可积的必要条件是 f 为有界函数. 同样的, 有界函数未必可积.

注

称 $\sum_{i,j} f(\xi_{ij})v(\mathbb{I}_{ij})$ 为 f 关于分割 π 的一个 **Riemann 和**, 也记为 $S(f,\pi,\xi)$.如果 f 可积, 则积分可用极限表示

$$\int_{\mathbb{I}} f = \lim_{\|\pi\|\to 0} S(f,\pi,\xi).$$

注

与一元函数类似, f 在 $\mathbb{I}$ 上 Riemann 可积的必要条件是 f 为有界函数. 同样的, 有界函数未必可积.

下面假设 f 为 $\mathbb{I}$ 上定义的有界函数. 我们像对一元函数所做过的那样来讨论 f 可积的充分必要条件.

有界多元函数可积的必要条件

达布上和、达布下和、振幅

记 $M_{ij} = \sup_{p \in \mathbb{I}_{ij}} f(p)$, $m_{ij} = \inf_{p \in \mathbb{I}_{ij}} f(p)$, 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}),$$

达布上和、达布下和、振幅

记 $M_{ij} = \sup_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, $m_{ij} = \inf_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}),$$

$S(\pi)$ 和 $s(\pi)$ 分别是 f 关于分割 π 的 **Darboux 上和**和 **Darboux 下和**.

达布上和、达布下和、振幅

记 $M_{ij} = \sup_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, $m_{ij} = \inf_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}),$$

$S(\pi)$ 和 $s(\pi)$ 分别是 f 关于分割 π 的 **Darboux 上和**和 **Darboux 下和**.与一元函数一样, 称

$$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij} = \sup_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p) - \inf_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$$

为 f 在小矩形 $\mathbb{I}_{ij}$ 上的**振幅**.

达布上和、达布下和、振幅

记 $M_{ij} = \sup_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, $m_{ij} = \inf_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$, 并令

$$S(\pi) = S(\pi, f) = \sum_{i,j} M_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}), \quad s(\pi) = s(\pi, f) = \sum_{i,j} m_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}),$$

$S(\pi)$ 和 $s(\pi)$ 分别是 f 关于分割 π 的 **Darboux 上和**和 **Darboux 下和**.与一元函数一样, 称

$$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij} = \sup_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p) - \inf_{p\in\mathbb{I}_{ij}} f(p)$$

为 f 在小矩形 $\mathbb{I}_{ij}$ 上的**振幅**.f 的上和与下和之差可以表示为

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}).$$

加细分割

定义

如果 $[a,b]$ 的分割 π_1' 是由 π_1 通过添加分点得到, $[c,d]$ 的分割 π_2' 是由 π_2 通过添加分点得到, 则称 $[a,b]\times[c,d]$ 的分割 $\pi'=\pi_1'\times\pi_2'$ 是 $\pi=\pi_1\times\pi_2$ 的**一个加细**.

加细分割

定义

如果 $[a,b]$ 的分割 π_1' 是由 π_1 通过添加分点得到, $[c,d]$ 的分割 π_2' 是由 π_2 通过添加分点得到, 则称 $[a,b]\times[c,d]$ 的分割 $\pi'=\pi_1'\times\pi_2'$ 是 $\pi=\pi_1\times\pi_2$ 的**一个加细**.

对于加细分割, 下面的命题的证明和一元函数完全类似.

定义

如果 $[a,b]$ 的分割 π_1' 是由 π_1 通过添加分点得到, $[c,d]$ 的分割 π_2' 是由 π_2 通过添加分点得到, 则称 $[a,b]\times[c,d]$ 的分割 $\pi'=\pi_1'\times\pi_2'$ 是 $\pi=\pi_1\times\pi_2$ **的一个加细**.

对于加细分割, 下面的命题的证明和一元函数完全类似.

命题

如果 π' 是 π 的加细, 则

$$s(\pi)\leqslant s(\pi')\leqslant S(\pi')\leqslant S(\pi),$$

即分割加细后**下和不减, 上和不增**.

推论

对于 $\mathbb{I}$ 的任何两个分割 π^1, π^2, 均有

$$s(\pi^1) \leqslant S(\pi^2).$$

推论

对于 $\mathbb{I}$ 的任何两个分割 π^1, π^2, 均有

$$s(\pi^1) \leqslant S(\pi^2).$$

Proof.

设 $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2$, $\pi^2 = \pi_1' \times \pi_2'$, 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi_1') \times (\pi_2 \cup \pi_2'),$$

推论

对于 $\mathbb{I}$ 的任何两个分割 π^1, π^2, 均有

$$s(\pi^1) \leqslant S(\pi^2).$$

Proof.

设 $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2, \pi^2 = \pi_1' \times \pi_2'$, 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi_1') \times (\pi_2 \cup \pi_2'),$$

则 π 既是 π^1 的加细, 又是 π^2 的加细,

推论

对于 $\mathbb{I}$ 的任何两个分割 π^1, π^2, 均有

$$s(\pi^1) \leqslant S(\pi^2).$$

Proof.

设 $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2$, $\pi^2 = \pi_1' \times \pi_2'$, 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi_1') \times (\pi_2 \cup \pi_2'),$$

则 π 既是 π^1 的加细, 又是 π^2 的加细,因此

$$s(\pi^1) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant S(\pi^2),$$

推论

对于 $\mathbb{I}$ 的任何两个分割 π^1, π^2, 均有

$$s(\pi^1) \leqslant S(\pi^2).$$

Proof.

设 $\pi^1 = \pi_1 \times \pi_2$, $\pi^2 = \pi_1' \times \pi_2'$, 令

$$\pi = \pi^1 \cup \pi^2 = (\pi_1 \cup \pi_1') \times (\pi_2 \cup \pi_2'),$$

则 π 既是 π^1 的加细, 又是 π^2 的加细,因此

$$s(\pi^1) \leqslant s(\pi) \leqslant S(\pi) \leqslant S(\pi^2),$$

这说明下和总是不超过上和. □

对于有界函数, 它的上和与下和也都是有界的.

对于有界函数, 它的上和与下和也都是有界的.因此可以考虑

$$S(f) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad s(f) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

对于有界函数, 它的上和与下和也都是有界的.因此可以考虑

$$S(f) = \inf_{\pi} S(\pi), \quad s(f) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

分别称 $S(f)$, $s(f)$ 为 f 在 $\mathbb{I}$ 上的**上积分与下积分**.

例

例

如果 $f(x) = k$ 为常值函数, 则显然它在 $\mathbb{I}$ 上的任何 Riemann 和均为 $kv(\mathbb{I})$, 因此常值函数可积. 同时, 常值函数的上积分和下积分与其积分也相等.

例

例

如果 $f(x) = k$ 为常值函数, 则显然它在 $\mathbb{I}$ 上的任何 Riemann 和均为 $kv(\mathbb{I})$, 因此常值函数可积. 同时, 常值函数的上积分和下积分与其积分也相等.

如果 k 为常数, 则易见 $f + k$ 可积当且仅当 f 可积, 且

$$S(f + k) = S(f) + kv(\mathbb{I}), \quad s(f + k) = s(f) + kv(\mathbb{I}).$$

达布定理

定理

设 f 为 $\mathbb{I}$ 上的有界函数, 则

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi), \qquad \lim_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup_{\pi} s(\pi).$$

定理 (可积的充要条件)

设 f 为 $\mathbb{I}$ 上的有界函数, 则下列条件等价:

- *(1)* f 在 $\mathbb{I}$ 上 *Riemann* 可积.
- *(2)* f 在 $\mathbb{I}$ 上的上积分和下积分相等.
- *(3)* $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i,j} \omega_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}) = 0$.
- *(4)* 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\mathbb{I}$ 的某个分割 π, 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i,j} \omega_{ij} v(\mathbb{I}_{ij}) < \varepsilon.$$

推论

设 f 为矩形 $\mathbb{I}$ 上的连续函数, 则 f 是 *Riemann* 可积的.

推论

设 f 为矩形 $\mathbb{I}$ 上的连续函数, 则 f 是 *Riemann* 可积的.

Proof.

f 在 $\mathbb{I}$ 上连续意味着 f 在 $\mathbb{I}$ 上一致连续.

推论

设 f 为矩形 $\mathbb{I}$ 上的连续函数, 则 f 是 *Riemann* 可积的.

Proof.

f 在 $\mathbb{I}$ 上连续意味着 f 在 $\mathbb{I}$ 上一致连续.利用可积的充要条件（比如(3)）, 剩下的证明和一元函数完全相同. $\square$

对于多元函数, 下面的结果也是成立的.

对于多元函数, 下面的结果也是成立的.

定理 (Riemann)

设 f 为 $\mathbb{I}$ 上的有界函数, 则 f 可积的充分必要条件是任给 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 $\mathbb{I}$ 的分割 π, 使得

$$\sum_{\omega_{ij} \geqslant \eta} v(I_{ij}) < \varepsilon.$$

对于多元函数, 下面的结果也是成立的.

定理 (Riemann)

设 f 为 $\mathbb{I}$ 上的有界函数, 则 f 可积的充分必要条件是任给 $\varepsilon, \eta > 0$, 存在 $\mathbb{I}$ 的分割 π, 使得

$$\sum_{\omega_{ij} \geqslant \eta} v(I_{ij}) < \varepsilon.$$

这个定理的意思是, $\mathbb{I}$ 上的有界函数 f 可积当且仅当任给 $\varepsilon, \eta > 0$, 总存在 $\mathbb{I}$ 上的分割, 在此分割下那些振幅超过 η 部分的体积之和小于 ε.

引入零测集刻画可积函数

定义 (零测集)

设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个闭矩形

$$I_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon,$$

则称 A 为**零测集**.

定义 (零测集)

设 $A \subset \mathbb{R}^2$ 为平面点集. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 存在至多可数个闭矩形

$$I_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon,$$

则称 A 为**零测集**.

和一维的情形类似, 我们有下面的性质.

命题

- *(1)* 有限点集均为零测集;
- *(2)* 零测集的子集仍为零测集;
- *(3)* 可数个零测集之并仍为零测集;
- *(4)* 矩形的边界是零测集;
- *(5)* 设 f 为 $[a, b]$ 上的一元可积函数, 则其图像 $\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$ 为零测集.

命题

- *(1)* 有限点集均为零测集;
- *(2)* 零测集的子集仍为零测集;
- *(3)* 可数个零测集之并仍为零测集;
- *(4)* 矩形的边界是零测集;
- *(5)* 设 f 为 $[a,b]$ 上的一元可积函数, 则其图像 $\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$ 为零测集.

Proof.

(1) 设 $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, 这里 $p_i = (x^i, y^i)$. 任取 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4n}}$, 令 $I_i = [x^i - \delta, x^i + \delta] \times [y^i - \delta, y^i + \delta]$, 则

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} v(I_i) = 4n\delta^2 < \varepsilon.$$

□

Proof.

(2) 设 B 是零测集 A 的子集. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 I_i, $i = 1, 2, \ldots$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon.$$

Proof.

(2) 设 B 是零测集 A 的子集. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 I_i, $i = 1, 2, \ldots$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad 且 \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon.$$

而 $B \subset A$,

Proof.

(2) 设 B 是零测集 A 的子集. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 I_i, $i = 1, 2, \ldots$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad \text{且} \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon.$$

而 $B \subset A$,故任给 $\varepsilon > 0$, 上述可数个闭矩形 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 B 成为零测集的要求, 故得证.

Proof.

(2) 设 B 是零测集 A 的子集. 任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 I_i, $i = 1, 2, \ldots$, 使得

$$A \subset \bigcup_{i \geqslant 1} I_i, \quad 且 \quad \sum_{i \geqslant 1} v(I_i) < \varepsilon.$$

而 $B \subset A$,故任给 $\varepsilon > 0$, 上述可数个闭矩形 $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 B 成为零测集的要求, 故得证.

(3) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 是一列零测集. 记

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ ,$$

我们证明 A 仍是零测集. □

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A_i 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 $\{I_j^i\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$A_i \subset \bigcup_{j \geqslant 1} I_j^i, \quad \text{且} \quad \sum_{j \geqslant 1} v(I_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由于 A_i 是零测集, 故存在至多可数个闭矩形 $\{I_j^i\}_{j=1}^{\infty}$, 使得

$$A_i \subset \bigcup_{j\geqslant 1} I_j^i, \quad \text{且} \quad \sum_{j\geqslant 1} v(I_j^i) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

$$\begin{array}{ll}
A_1: & I_1^1, I_2^1, I_3^1, \ldots, I_n^1, \ldots \\
A_2: & I_1^2, I_2^2, I_3^2, \ldots, I_n^2, \ldots \\
A_3: & I_1^3, I_2^3, I_3^3, \ldots, I_n^3, \ldots \\
\vdots & \\
A_m: & I_1^m, I_2^m, I_3^m, \ldots, I_n^m, \ldots \\
\vdots &
\end{array}$$

□

Proof.

于是, 对于 $A=\bigcup_{i\geqslant 1} A_i$, 对于上面任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在闭矩形列

$$I_1^1; I_2^1, I_2^2, I_1^2; I_3^1, I_3^2, I_3^3, I_2^3, I_1^3; \ldots ; I_k^1, I_k^2, \ldots , I_k^k, I_{k-1}^k, \ldots , I_1^k; \ldots$$

使得

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i\geqslant 1} A_i \subset \bigcup_{i\geqslant 1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i) \\ &= I_1^1 \cup I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_1^2 \cup I_3^1 \cup I_3^2 \cup I_3^3 \cup I_2^3 \cup I_1^3 \cup \cdots \cup I_k^1 \cup I_k^2 \cup \cdots \cup I_k^k \cup I_{k-1}^k \cup \cdots \cup I_1^k \cup \cdots \end{aligned}$$

Proof.

于是, 对于 $A = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$, 对于上面任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在闭矩形列

$$I_1^1; I_2^1, I_2^2, I_1^2; I_3^1, I_3^2, I_3^3, I_2^3, I_1^3; \ldots; I_k^1, I_k^2, \ldots, I_k^k, I_{k-1}^k, \ldots, I_1^k; \ldots$$

使得

$$\begin{aligned} A = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i &\subset \bigcup_{i\geqslant 1}(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i) \\ &= I_1^1 \cup I_2^1 \cup I_2^2 \cup I_1^2 \cup I_3^1 \cup I_3^2 \cup I_3^3 \cup I_2^3 \cup I_1^3 \cup \cdots \cup I_k^1 \cup I_k^2 \cup \cdots \cup I_k^k \cup I_{k-1}^k \cup \cdots \cup I_1^k \cup \cdots \end{aligned}$$

并且对于任意 n, 有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v(I_j^i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$$

$\square$

appendix