第二型曲线积分

徐海峰整理

May 9, 2025

数学科学学院，扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

第二型曲线积分

物理问题

考虑物理中变力做功的问题: 设质点在力场 F 中沿一条曲线 σ 运动, 求力场 F 对该质点所做的功.

物理问题

考虑物理中变力做功的问题: 设质点在力场 F 中沿一条曲线 σ 运动, 求力场 F 对该质点所做的功.

我们可以将这个问题转化为曲线上的一个积分问题.

物理问题

考虑物理中变力做功的问题: 设质点在力场 F 中沿一条曲线 σ 运动, 求力场 F 对该质点所做的功.

我们可以将这个问题转化为曲线上的一个积分问题.

为此, 设 $\sigma: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ 为一条参数曲线, f 是定义在 σ 上的取值于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量值函数, 其分量记为 f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 任取 $[\alpha, \beta]$ 的一个分割

$$\pi: \ \alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = \beta,$$

考虑和

$$\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})\big), \quad (\xi_j \in [t_{j-1}, t_j])$$

如果极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big)$$

存在且与 $\{\xi_j\}$ 的选取无关, 则称此极限为 $f_i \mathrm{d}x_i$ 沿曲线 σ 的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_\sigma f_i \mathrm{d}x_i = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big)\ .$$

如果极限

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big)$$

存在且与 $\{\xi_j\}$ 的选取无关, 则称此极限为 $f_i \mathrm{d}x_i$ 沿曲线 σ 的**第二型曲线积分**, 记为

$$\int_\sigma f_i \mathrm{d}x_i = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big) .$$

如果每一个 $f_i \mathrm{d}x_i$ 沿 σ 的第二型曲线积分都存在, 则记

$$\int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + \int_\sigma f_n \mathrm{d}x_n ,$$

这个积分称为形式和 $f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n$ 沿 σ 的第二型曲线积分, 在不引起混淆的情况下也称为 f 沿 σ 的第二型曲线积分.

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.设 $\phi\colon\ [\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma\circ\phi\colon\ [\gamma,\delta]\to\mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 只是这两条曲线选取了不同的参数而已.

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.设 $\phi\colon [\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma\circ\phi\colon [\gamma,\delta]\to\mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 只是这两条曲线选取了不同的参数而已.

- 如果 ϕ 是严格单调递增的, 则称**这两个参数是同向的**;
- 如果 ϕ 是严格单调递减的, 则称**这两个参数是反向的**（不同向）.

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.设 $\phi\colon\ [\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma\circ\phi\colon\ [\gamma,\delta]\to\mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 只是这两条曲线选取了不同的参数而已.

- 如果 ϕ 是严格单调递增的, 则称**这两个参数是同向的**;
- 如果 ϕ 是严格单调递减的, 则称**这两个参数是反向的**（不同向）.

从

$$\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big),\quad (\xi_j\in[t_{j-1},t_j])$$

可以看出, 对于同向的两个参数, 第二型曲线积分的值不变;

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.设 $\phi:\ [\gamma,\delta]\to[\alpha,\beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma\circ\phi:\ [\gamma,\delta]\to\mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 只是这两条曲线选取了不同的参数而已.

- 如果 ϕ 是严格单调递增的, 则称**这两个参数是同向的**;
- 如果 ϕ 是严格单调递减的, 则称**这两个参数是反向的**（不同向）.

从

$$\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})\big),\quad (\xi_j\in[t_{j-1},t_j])$$

可以看出, 对于同向的两个参数, 第二型曲线积分的值不变;而对于反向的两个参数, 第二型曲线积分的值正好相差一个符号!

第二型曲线积分与第一型曲线积分的不同之处在于第二型曲线积分跟曲线的方向有关.

为说明这一点, 我们考虑曲线的**重新参数化**.设 $\phi: [\gamma, \delta] \to [\alpha, \beta]$ 为严格单调的可逆连续映射, 则复合映射 $\sigma \circ \phi: [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}^n$ 也是一条参数曲线, 它和 σ 的像完全相同, 只是这两条曲线选取了不同的参数而已.

- 如果 ϕ 是严格单调递增的, 则称**这两个参数是同向的**;
- 如果 ϕ 是严格单调递减的, 则称**这两个参数是反向的**（不同向）.

从

$$\sum_{j=1}^{m} f_i(\sigma(\xi_j))\big(x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})\big), \quad (\xi_j \in [t_{j-1}, t_j])$$

可以看出, 对于同向的两个参数, 第二型曲线积分的值不变;而对于反向的两个参数, 第二型曲线积分的值正好相差一个符号!

这和第一型曲线积分是不同的, 比如曲线的长度就不依赖于参数的选取.

因此, 为了使第二型曲线积分有意义, 我们总是要给曲线指定一个方向, 这个方向是由某个参数决定的.

因此, 为了使第二型曲线积分有意义, 我们总是要给曲线指定一个方向, 这个方向是由某个参数决定的.给定了方向的曲线称为**有向曲线**. 如果参数反向, 则新的有向曲线记为 $-\sigma$, 这时有

$$\int_{-\sigma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = -\int_{\sigma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n \ .$$

作为 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形

对于可求长曲线而言, 第二型曲线积分也是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形.

作为 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形

对于可求长曲线而言, 第二型曲线积分也是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形.

对于（分段）连续可微曲线, 第二型曲线积分可以转化为 Riemann 积分:

$$\int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \sum_{i=1}^{n} \int_\alpha^\beta f_i(\sigma(t)) x_i'(t) \mathrm{d}t \ .$$

另一方面, 如果 σ 为连续可微曲线, s 是其弧长参数, 则

$$\|\sigma'(s)\| = \|\sigma'(t)\|(s'(t))^{-1} = 1.$$

另一方面, 如果 σ 为连续可微曲线, s 是其弧长参数, 则

$$\|\sigma'(s)\| = \|\sigma'(t)\|(s'(t))^{-1} = 1.$$

如果记 $\sigma'(s) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, 则第二型曲线积分可以写为

$$\int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^n \int_0^{L(\sigma)} f_i(\sigma(s)) \cos\alpha_i \mathrm{d}s\ ,$$

另一方面, 如果 σ 为连续可微曲线, s 是其弧长参数, 则

$$\|\sigma'(s)\| = \|\sigma'(t)\|(s'(t))^{-1} = 1.$$

如果记 $\sigma'(s) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, 则第二型曲线积分可以写为

$$\int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{L(\sigma)} f_i(\sigma(s)) \cos\alpha_i \mathrm{d}s \ ,$$

即第二型曲线积分转化成了第一型曲线积分.

另一方面, 如果 σ 为连续可微曲线, s 是其弧长参数, 则

$$\|\sigma'(s)\| = \|\sigma'(t)\|(s'(t))^{-1} = 1.$$

如果记 $\sigma'(s) = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, 则第二型曲线积分可以写为

$$\int_\sigma f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n = \int_0^{L(\sigma)} f(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) \mathrm{d}s = \sum_{i=1}^n \int_0^{L(\sigma)} f_i(\sigma(s)) \cos\alpha_i \mathrm{d}s \ ,$$

即第二型曲线积分转化成了第一型曲线积分.

注

这里 α_i 是曲线 σ 在 s 处的切向量 $\sigma'(s)$ 与 x_i 轴正向的夹角, 也叫**方向角**, $\cos\alpha_i$ 称为**方向余弦**.

例

如果 σ 为一条闭曲线（环路），即 $\sigma(\alpha)=\sigma(\beta)$, 则选定了方向以后, 不论从曲线上哪一点出发, 沿此闭曲线的第二型曲线积分的值不变, 通常我们将这样的积分记为

$$\oint_{\sigma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n \ .$$

例

如果 σ 为一条闭曲线（环路），即 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$, 则选定了方向以后, 不论从曲线上哪一点出发, 沿此闭曲线的第二型曲线积分的值不变, 通常我们将这样的积分记为

$$\oint_{\sigma} f_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + f_n \mathrm{d}x_n \ .$$

单位圆周 S^1 就是平面上的一条闭曲线, 如果用参数方程

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

表示, 则 S^1 的方向就是所谓的逆时针方向.