导数与微分

徐海峰整理

September 29, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

---

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

[2] 蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

导数

定义

设函数 f 在 x_0 附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在且有限, 则称 f 在 x_0 处可导, 此极限称为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.

若记 $y=f(x)$, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

若记 $y = f(x)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, 它主要强调 f 是关于 x 求导的.

若记 $y=f(x)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号为 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$, 它主要强调 f 是关于 x 求导的.

以下记号都是可以的:

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = f'\Big|_{x=x_0} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f)(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x_0}$$

导数的 $\varepsilon-\delta$ 语言描述

定义

如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处可导, 导数为 A.

性质

命题

设 $C \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $Cf(x)$ 在 x_0 处也可导, 且

$$(Cf(x))'(x_0) = Cf'(x_0).$$

性质

命题

设 $C \in \mathbb{R}$, 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 $Cf(x)$ 在 x_0 处也可导, 且

$$(Cf(x))'(x_0) = Cf'(x_0).$$

Proof.

根据导数的定义直接证明. □

常见函数的导数

研究下列函数的导数

例

$$C, \quad x^n (n \geqslant 1), \quad a^x (a > 0, a \neq 1), \quad \log_a x, \quad \sin x, \quad \cos x.$$

常值函数的导数

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

常值函数的导数

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$y' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

常值函数的导数

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$y' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

注

导数反映的是函数的变化率，常值函数的变化率当然是零.

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geqslant 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + n x_0^{n-1} \Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geqslant 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0+\Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx_0^{n-1}.$$

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geqslant 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0+\Delta x)^n = x_0^n + n x_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{n x_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = n x_0^{n-1}.$$

由于对定义域内的任意 x_0 成立, 故有

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

幂函数 x^n 的导数

或者用恒等式

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

证明.

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a.$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,$$

得

$$\frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=a^{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a.$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

特别地, $(e^x)'=e^x$.

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.设 $x_0 > 0$,

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a>0$ 且 $a\neq 1$.设 $x_0>0$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a x-\log_a x_0}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a \frac{x}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a(1+\frac{x-x_0}{x_0})}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x-x_0}{x_0}\frac{1}{\ln a}}{x-x_0} = \frac{1}{x_0\ln a},
\end{aligned}
$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.设 $x_0 > 0$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(1 + \frac{x-x_0}{x_0})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{x-x_0}{x_0}\frac{1}{\ln a}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0 \ln a},
\end{aligned}
$$

因此

$$
(\log_a x)'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln a}.
$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.设 $x_0 > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a x-\log_a x_0}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a \frac{x}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\log_a(1+\frac{x-x_0}{x_0})}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x-x_0}{x_0}\frac{1}{\ln a}}{x-x_0} = \frac{1}{x_0\ln a},\end{aligned}$$

因此

$$(\log_a x)'(x_0) = \frac{1}{x_0\ln a}.$$

由 x_0 的任意性,

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \quad (\forall\ x > 0).$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\cdot\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x_0}\log_a e = \frac{1}{x_0\ln a}.$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a>0$ 且 $a\neq 1$.当 $x_0>0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

以及复合函数的极限法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\cdot\frac{\Delta x}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})^{\frac{x_0}{\Delta x}}\\&=\frac{1}{x_0}\log_a e=\frac{1}{x_0\ln a}.\end{aligned}$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a>0$ 且 $a\neq 1$.当 $x_0>0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

以及复合函数的极限法则,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})}{x_0\cdot\frac{\Delta x}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x_0})^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a e=\frac{1}{x_0\ln a}.$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地, 当 $a=e$ 时, 有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数.

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\frac{x}{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+\frac{x-x_0}{x_0})}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x-x_0}{x_0}}{x-x_0}=\frac{1}{x_0},\end{aligned}$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln(1 + \frac{x-x_0}{x_0})}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{x-x_0}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0},
\end{aligned}$$

因此

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (x > 0).$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

对于函数 $\log_a x$, 将其写为 $\frac{\ln x}{\ln a}$.

对数函数 $\ln x$ 的导数

对于函数 $\log_a x$, 将其写为 $\frac{\ln x}{\ln a}$.于是

$$\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x},$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

对于函数 $\log_a x$, 将其写为 $\frac{\ln x}{\ln a}$.于是

$$(\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x},$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

或者利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,

对数函数 $\ln x$ 的导数

或者利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0\cdot\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{x_0}\ln e = \frac{1}{x_0}.$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

或者利用已证结论

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0\cdot\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0}\ln e = \frac{1}{x_0}.\end{aligned}$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

习题

证明: 对于 $x \in \mathbb{R}^*$, $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

导函数

我们看到如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内每一点都可导, 则可定义一个新的函数

$$\begin{aligned} f' : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

我们看到如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内每一点都可导, 则可定义一个新的函数

$$\begin{aligned} f' : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

称此函数 f' 为 f 的**导函数**.

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{和} \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则.

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{和} \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则.因此,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\Delta x} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad 和 \quad \lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则.因此,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

同理可以算出 $(\cos x)' = -\sin x$.

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot (-1) \cdot \lim_{x \to x_0} \sin \frac{x + x_0}{2} \\
&= -\sin x_0,
\end{aligned}
$$

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{-2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}\cdot(-1)\cdot\lim_{x\to x_0}\sin\frac{x+x_0}{2}\\ &= -\sin x_0,\end{aligned}$$

即

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

单侧导数

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有**左导数**和**右导数**的概念.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有**左导数**和**右导数**的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有**左导数**和**右导数**的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有**左导数**和**右导数**的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有**左导数**和**右导数**的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

显然, f 在 x_0 处可导当且仅当其左右导数相等.

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

例子

例

研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

例子

例

研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, $f'(x)=(x)'=1$;

例子

例

研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, $f'(x)=(x)'=1$;当 $x<0$ 时, $f'(x)=(-x)'=-1$;

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$;当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1$;

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1;$$

例

研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, $f'(x)=(x)'=1$;当 $x<0$ 时, $f'(x)=(-x)'=-1$;

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1;$$

例

研究函数 $f(x)=|x|$ 在 $x_0=0$ 处的可导性.

解.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

当 $x>0$ 时, $f'(x)=(x)'=1$;当 $x<0$ 时, $f'(x)=(-x)'=-1$;

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1;$$

因此, $f(x)$ 在 0 处不可导. 当 $x\neq 0$ 时, $(|x|)'=\mathrm{sgn}x$. ∎

例子

例

定义函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

例

定义函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

研究 f 在 $x_0=0$ 处的可导性.

利用所学知识先证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$. 见问题3349.

函数可导和连续的关系

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right] \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

即推出

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

故 f 在 x_0 处连续. $\square$

备注

f 在 x_0 处可导,

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

我们经常会这样推理.

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

我们经常会这样推理.这没有错, 但要注意逻辑.

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

我们经常会这样推理.这没有错, 但要注意逻辑.可能的逻辑是这样的:

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

我们经常会这样推理.这没有错, 但要注意逻辑.可能的逻辑是这样的:

否则, 若 $f(x) - f(x_0)$ 趋于某个非零常数, 则左边极限为无穷, 矛盾.

备注

f 在 x_0 处可导,则存在常数 A, 使得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A.$$

由于分母 $x - x_0$ 趋于零(当 $x \to x_0$ 时),故推出分子 $f(x) - f(x_0)$ 也趋于零(当 $x \to x_0$ 时).

我们经常会这样推理.这没有错, 但要注意逻辑.可能的逻辑是这样的:

否则, 若 $f(x) - f(x_0)$ 趋于某个非零常数, 则左边极限为无穷, 矛盾.

但这个前提是 $f(x) - f(x_0)$ 趋于某个常数. 这正式需要证明的.

导数的运算法则

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ （线性性）;

(2) $(fg)' = f'g + fg'$ （导性）.

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ （线性性）;

(2) $(fg)' = f'g + fg'$ （导性）.

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导,

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ （线性性）;

(2) $(fg)' = f'g + fg'$ （导性）.

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导,则

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\
=&\lim_{x \to x_0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
=&\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0),
\end{aligned}$$

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f+\beta g$ 在 x 处可导. 且有

(1) $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$ （线性性）;

(2) $(fg)'=f'g+fg'$ （导性）.

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导,则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{(\alpha f(x)+\beta g(x))-(\alpha f(x_0)+\beta g(x_0))}{x-x_0}\\=&\lim_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\beta\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\=&\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0),\end{aligned}$$

故 $(\alpha f(x)+\beta g(x))'\Big|_{x_0}=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0).$ □

Proof.

(2)

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

续

Proof.

(2)

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}
$$

这里用到了 g 在 x_0 的连续性(由其可导性推出)以及极限的运算法则. □

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零.先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零.先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{g(x_0)g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零.先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{g(x_0)g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

由前面的命题, $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ 在 x_0 处也可导, 且有

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

证法二

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \frac{1}{g^2(x_0)}\left[f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\right]
\end{aligned}
$$

证法二

Proof.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0)-f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]\\
&= \frac{1}{g^2(x_0)}\left[f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\right]
\end{aligned}
$$

最后一个等号用到了 g 在 x_0 连续. □

例子

研究下列函数的导数

$$\log_a x (a > 0, a \neq 1), \quad \csc x, \quad \sec x, \quad \tan x, \quad \cot x.$$

$\log_a x$ 的导数

例

求 $(\log_a x)'$.

例

求 $(\log_a x)'$.

解. 利用 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ 可得

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

∎

$\csc x$ 和 $\sec x$ 的导数

例

求 $\csc x$ 和 $\sec x$ 的导数

例

求 $\csc x$ 和 $\sec x$ 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = -\csc x \cot x.$$

例

求 $\csc x$ 和 $\sec x$ 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = -\csc x \cot x.$$

注

这里第二个等号利用了已证结论 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

例

求 $\csc x$ 和 $\sec x$ 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cos x = -\csc x \cot x.$$

注

这里第二个等号利用了已证结论 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \sec x \tan x.$$

∎

$\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

$\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

解.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

解.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

∎

汇总

幂函数

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

指数函数与对数函数

1. $(a^x)' = a^x \ln a$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

三角函数

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

微分

微分

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A, 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0), \tag{*}$$

则称 f 在 x_0 处**可微**, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A, 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0), \tag{*}$$

则称 f 在 x_0 处**可微**, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

注

这里的线性映射可记为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A, 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0), \tag{*}$$

则称 f 在 x_0 **处可微**, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的**微分**, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

注

这里的线性映射可记为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0):\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

当然, 定义域也可仅限于 x_0 的某个邻域.

例

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y = x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微.

例

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y=x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y=x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微.它在 x_0 处的微分为

$$dy(x_0):\ x \mapsto x,$$

是一个恒同映射.

例

定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $y = x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y = x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微.它在 x_0 处的微分为

$$dy(x_0):\ x \mapsto x,$$

是一个恒同映射.

注

由于 $y = x$, 故上面函数 $y = x$ 在 x_0 处的微分也写为

$$dx(x_0):\ x \mapsto x,$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0,$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0,$$

因此

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(x-x_0)\quad(x\to x_0),$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=0,$$

因此

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=o(x-x_0)\quad(x\to x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\quad(x\to x_0).$$

这说明 f 在 x_0 处可微. □

续

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$,

续

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$,则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

续

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)=A$. $\square$

续

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)=A$. □

注

(1) 若函数 f 在 x_0 处可导, 则 f 在该点处的切线平移到原点后即为 f 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0):\ x\mapsto f'(x_0)x$.

续

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)+o(x-x_0)}{x-x_0}=A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0)=A$. □

注

(1) 若函数 f 在 x_0 处可导, 则 f 在该点处的切线平移到原点后即为 f 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0):\ x\mapsto f'(x_0)x$.

(2) 可导等价于可微仅对于一元函数成立.

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似.

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似.由于微分的斜率等于导数, 故将 x_0 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 写为

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x(x_0),$$

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似.由于微分的斜率等于导数, 故将 x_0 处的微分 $\mathrm{d}f(x_0)$ 写为

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x(x_0),$$

其中 $\mathrm{d}x(x_0)$ 是函数 x 在 x_0 处的微分(即恒同线性映射: $x \mapsto x$).

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0-\delta, x_0]$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0-\delta, x_0]$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微（包括单侧可微）, 则称 f 在 I 上可微.

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0-\delta, x_0]$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微（包括单侧可微）, 则称 f 在 I 上可微.

定义

设函数 f 在区间 I 上可微, 则对任意 $x_0 \in I$, 对应到该点处的微分, 即线性映射 $\mathrm{d}f(x_0): \ x \mapsto f'(x_0)x$, 于是可以定义映射

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f: \ I &\to \{\text{过原点的所有直线构成的集合}\} \\ x &\mapsto \mathrm{d}f(x) \end{aligned}$$

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0-\delta, x_0]$ 满足 $(*)$, 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微（包括单侧可微）, 则称 f 在 I 上可微.

定义

设函数 f 在区间 I 上可微, 则对任意 $x_0 \in I$, 对应到该点处的微分, 即线性映射 $\mathrm{d}f(x_0): \ x \mapsto f'(x_0)x$, 于是可以定义映射

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}f: I &\to \{\text{过原点的所有直线构成的集合}\} \\
x &\mapsto \mathrm{d}f(x)
\end{aligned}
$$

这个映射称为 f 的**外微分**或**全微分**. (关于外微分的性质后面会介绍.)

链式法则

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Proof.

g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Proof.

g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这说明 $x \to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$. $\square$

续

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

续

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. $\square$

续

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

注

链式法则对于任意有限个函数的复合都适用,

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o\big(g(x) - g(x_0)\big) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

注

链式法则对于任意有限个函数的复合都适用,比如

$$[f(g(h))]' = f'(g(h))g'(h)h'.$$

或者这样证明

Proof.

如前所述, 当 $x \to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$.

或者这样证明

Proof.

如前所述, 当 $x \to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$.故 $o\big(g(x) - g(x_0)\big) = o(x - x_0)$.

或者这样证明

Proof.

如前所述, 当 $x \to x_0$ 时, 存在常数 C, 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leqslant C|x - x_0|$.故 $o\big(g(x) - g(x_0)\big) = o(x - x_0)$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(g(x_0))\big(g(x) - g(x_0)\big) + o\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0)) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{o\big(g(x) - g(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0)) g'(x_0).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proof.

或采用导数证明.

Proof.

或采用导数证明.由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Proof.

或采用导数证明.由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \to x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

Proof.

或采用导数证明.由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \to x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\
&= \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}
$$

最后一个等号用到了条件 $f(y)$ 在 $y_0 = g(x_0)$ 处可导, g 在 x_0 处可导.

Proof.

或采用导数证明.由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \to x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] \\
&= \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(g(x_0))g'(x_0).
\end{aligned}$$

最后一个等号用到了条件 $f(y)$ 在 $y_0 = g(x_0)$ 处可导, g 在 x_0 处可导.

若存在收敛到 x_0 的点列 $\{x_i\}$, 使得 $g(x_i) = g(x_0)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. 由于 g 在 x_0 可导, 根据 Heine 定理, 对任何收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = g'(x_0).$$

$\square$

续

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$.

续

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$.而

$$\lim_{i \to \infty} \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = \lim_{i \to \infty} \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = 0.$$

续

Proof.

这说明 $g'(x_0)=0$.而

$$\lim_{i\to\infty}\frac{f(g(x_i))-f(g(x_0))}{x_i-x_0}=\lim_{i\to\infty}\frac{f(g(x_0))-f(g(x_0))}{x_i-x_0}=0.$$

因此, 此时

$$(f(g(x)))'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$$

仍成立. □

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$.而

$$\lim_{i\to\infty} \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = \lim_{i\to\infty} \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = 0.$$

因此，此时

$$(f(g(x)))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

仍成立. □

注

第二种情形是存在的，例如: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

例子

例

求 $\ln|x|$ 的导数.

例子

例

求 $\ln|x|$ 的导数.

解. 我们知道 $x \neq 0$ 时, $|x|' = \mathrm{sgn} x$. 由复合函数的求导得

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|}\mathrm{sgn} x = \frac{1}{x}.$$

∎

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0$, $x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0$, $x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

若 $\alpha > 1$, 则 $x = 0$ 处的导数计算如下:

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha - 1} = 0.$$

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0$, $x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

若 $\alpha > 1$, 则 $x = 0$ 处的导数计算如下:

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = 0.$$

若 $x < 0$, 此时要求 $\alpha = \frac{p}{q}$ 为有理数, p, q 为互素的整数, 且 q 为奇数. 我们有

$$(x^\alpha)' = \left((-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|}\right)' = (-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|}(\alpha \ln |x|)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

∎

反函数求导法则

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0). \tag{*}$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0). \tag{*}$$

当 $x \to x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g. 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0). \tag{*}$$

当 $x \to x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, 上式表明, 当 $x \to x_0$ 时, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant C|x - x_0|, \quad \text{或} \quad |y - y_0| \geqslant C|g(y) - g(y_0)|.$$

续

Proof.

特别地, 当 $y \to y_0$ 时, $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned} y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \to y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0) \end{aligned}$$

续

Proof.

特别地, 当 $y \to y_0$ 时, $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned} y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \to y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0) \end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0).$$

Proof.

特别地, 当 $y \to y_0$ 时, $x = g(y) \to g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned} y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \to y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0) \end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \to y_0).$$

这说明 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且导数为 $\frac{1}{f'(x_0)}$. □

注

导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能少.

注

导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能少.例如, $f(x) = x^3$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的可逆函数, f 处处可导, 但其反函数 $g(y) = y^{1/3}$ 在 $y = 0$ 处不可导.

研究下列函数的导数:

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x, \quad \operatorname{arccot} x.$$

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$.由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\ = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$.由反函数求导公式, 有

$$
\begin{aligned}
(\arcsin x)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} &= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}
$$

注: 要使 $g'(y) = \cos y \neq 0$, 则 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ∎

例

求 $\arccos x$ 的导数.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$.记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$.记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$.由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arccos x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$.记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$.由反函数求导公式, 有

$$
\begin{aligned}
(\arccos x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.
\end{aligned}
$$

注: 要使 $g'(y) = -\sin y \neq 0$, 则 $y \in (0, \pi)$. ∎

例

求 $\arctan x$ 的导数.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.记 $y = f(x) = \arctan x$, 则 $x = g(y) = \tan y$.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.记 $y = f(x) = \arctan x$, 则 $x = g(y) = \tan y$.由反函数求导公式, 有

$$
\begin{aligned}
(\arctan x)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.
\end{aligned}
$$

∎

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.记 $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$, 则 $x = g(y) = \cot y$.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.记 $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$, 则 $x = g(y) = \cot y$.由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\operatorname{arccot} x)' = f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\csc^2 y} \\ = -\frac{1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

∎

例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

解.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

双曲函数的导数

例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

解.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

双曲函数的导数

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.
\end{aligned}
$$

双曲函数的导数

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x \cdot (\sinh x)'}{\sinh^2 x} \\
&= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.
\end{aligned}
$$

双曲函数的导数

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{(\cosh x)'\sinh x - \cosh x \cdot (\sinh x)'}{\sinh^2 x} \\
&= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.
\end{aligned}
$$

或使用复合函数求导

$$
(\coth x)' = \left(\frac{1}{\tanh x}\right)' = -\frac{1}{\tanh^2 x}(\tanh^2 x)' = -\frac{1}{\tanh^2 x}\frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.
$$

例

求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的导数.

例

求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数.

解.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}
$$

∎

解. 方法二. 若记 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, 其定义域为 $\mathbb{R}$. 容易验证 $x = \sinh y$ 是其反函数(留作习题).

解. 方法二. 若记 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 其定义域为 $\mathbb{R}$. 容易验证 $x=\sinh y$ 是其反函数(留作习题).利用反函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sinh y)'_y} = \frac{1}{\cosh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

∎

幂指函数

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x)\ln u(x))' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x),$$

例

设 $u(x)>0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x)=u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x)\ln u(x))' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x),$$

而

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}f'(x),$$

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

而

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

故

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$

∎

续

解.

$$f'(x) = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$
$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$
$$= u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

∎

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)}\ln u \cdot v'(x)$;

续

解.

$$f'(x) = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$= u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

■

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)}\ln u \cdot v'(x)$;

将 $v(x)$ 视为常数 v 时, $(u(x)^{v})' = vu(x)^{v-1}\cdot u'(x)$.

解.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' \\
= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\
= u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).
\end{aligned}
$$

∎

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)}\ln u\cdot v'(x)$;

将 $v(x)$ 视为常数 v 时, $(u(x)^{v})' = vu(x)^{v-1}\cdot u'(x)$.

因此 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的求导也遵循导性规则.

外微分

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f:\ x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f: \ x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

称这个映射 $\mathrm{d}f$ 为 f 的**外微分**或**全微分**.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f: \; x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

称这个映射 $\mathrm{d}f$ 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f : \ x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

称这个映射 $\mathrm{d}f$ 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $\mathrm{d}f(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($\mathrm{d}f + \mathrm{d}g$)和数乘($\alpha\mathrm{d}f$)运算.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f: \ x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

称这个映射 $\mathrm{d}f$ 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $\mathrm{d}f(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($\mathrm{d}f + \mathrm{d}g$)和数乘($\alpha\mathrm{d}f$)运算.

由于在每一点 x 处, $\mathrm{d}f(x)$ 是斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 故等于 $f'(x)\mathrm{d}x(x)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $\mathrm{d}f(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$\mathrm{d}f:\ x \mapsto \mathrm{d}f(x)$$

称这个映射 $\mathrm{d}f$ 为 f 的**外微分或全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 $\mathrm{d}x$ 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $\mathrm{d}f(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($\mathrm{d}f + \mathrm{d}g$)和数乘($\alpha \mathrm{d}f$)运算.

由于在每一点 x 处, $\mathrm{d}f(x)$ 是斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 故等于 $f'(x)\mathrm{d}x(x)$.因此

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x.$$

微分形式

定义

一般地, 我们把形如 $f\mathrm{d}x$ (f 为函数)的表达式称为1 **次微分形式**.

微分的运算法则

根据导数的运算法则，我们有

命题

设 f, g 可微，则

- $\mathrm{d}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathrm{d}f+\beta\mathrm{d}g$, 其中 α, β 为常数;
- $\mathrm{d}(fg)=g\mathrm{d}f+f\mathrm{d}g$;
- $\mathrm{d}(\frac{f}{g})=\frac{g\mathrm{d}f-f\mathrm{d}g}{g^2}$, 其中 $g\neq 0$.

复合函数求导与全微分形式的不变性

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$\mathrm{d}[f(g)] = f'(g)\mathrm{d}g.$$

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$\mathrm{d}[f(g)] = f'(g)\mathrm{d}g.$$

Proof.

根据复合函数求导和外微分的定义, 有

$$\mathrm{d}[f(g)] = [f(g)]'\mathrm{d}x = f'(g)g'\mathrm{d}x = f'(g)\mathrm{d}g.$$

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$\mathrm{d}[f(g)] = f'(g)\mathrm{d}g.$$

Proof.

根据复合函数求导和外微分的定义, 有

$$\mathrm{d}[f(g)] = [f(g)]'\mathrm{d}x = f'(g)g'\mathrm{d}x = f'(g)\mathrm{d}g.$$

这个式子称为**微分的形式不变性**. □

汇总

幂函数

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}\ (\alpha \neq 0)$

指数函数与对数函数

1. $(a^x)' = a^x \ln a$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

三角函数

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

汇总

反三角函数

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

双曲函数

1. $(\sinh x)' = \cosh x$
2. $(\cosh x)' = \sinh x$
3. $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$
4. $(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$