方程的近似解

徐海峰整理

November 5, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

使用 Sowya 编程计算

二分法

二分法

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

二分法

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 则 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 之间至少存在一个实根.

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 则 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 之间至少存在一个实根.

又 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{7}{3}$ 在 $[0, 1]$ 内小于零.

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 则 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 之间至少存在一个实根.

又 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{7}{3}$ 在 $[0,1]$ 内小于零.故方程 $f(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一实根. ∎

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0,1)$ 内的实根的近似值，使误差不超过 10^{-20}.

解. 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$，则 $f(0) = 1$，$f(1) = -1$. 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 之间至少存在一个实根.

又 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{7}{3}$ 在 $[0,1]$ 内小于零.故方程 $f(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内有惟一实根. ∎

使用 Sowya 编程，得到近似解为 $x \approx 0.44504186791262880858$.

例

求方程 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 $(0, 1)$ 内的实根的近似值，使误差不超过 10^{-20}.

解. 令 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, 则 $f(0) = 1$, $f(1) = -1$. 因此 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 之间至少存在一个实根.

又 $f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 = 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{7}{3}$ 在 $[0, 1]$ 内小于零.故方程 $f(x) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有惟一实根. ∎

使用 Sowya 编程，得到近似解为 $x \approx 0.44504186791262880858$.

详见 使用二分法求方程的实根.

牛顿切线法

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$f(1) \approx -0.34147098480789650665250232163000000 < 0,$$
$$f(2) \approx 0.59070257317431830460398013409 0 > 0.$$

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$f(1) \approx -0.34147098480789650665250232163000000 < 0,$$
$$f(2) \approx 0.590702573174318304603980134090 > 0.$$

因此, $[1, 2]$ 是一个根的隔离区间.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值，使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$f(1) \approx -0.34147098480789650665250232163000000 < 0,$$
$$f(2) \approx 0.5907025731743183046039801340\,90 > 0.$$

因此, $[1, 2]$ 是一个根的隔离区间.并且在 $[1, 2]$ 上 $f'(x) > 0$, $f''(x) = \sin x > 0$.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$\begin{aligned} f(1) &\approx -0.34147098480789650665250232163000000 < 0, \\ f(2) &\approx 0.59070257317431830460398013409 0 > 0. \end{aligned}$$

因此, $[1, 2]$ 是一个根的隔离区间.并且在 $[1, 2]$ 上 $f'(x) > 0$, $f''(x) = \sin x > 0$.故选择 $x = 2$ 作为初始点.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$\begin{aligned} f(1) &\approx -0.34147098480789650665250232163000000 < 0, \\ f(2) &\approx 0.59070257317431830460398013409\,0 > 0. \end{aligned}$$

因此, $[1,2]$ 是一个根的隔离区间.并且在 $[1,2]$ 上 $f'(x) > 0$, $f''(x) = \sin x > 0$.故选择 $x = 2$ 作为初始点.

使用 Sowya 编程, 得到近似解为 $x \approx 1.4973003890958923146815215409\,48$.

例

使用牛顿切线法求方程 $x - \sin x = 0.5$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-20}.

解. 设 $f(x) = x - \sin x - 0.5$. f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

$$f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0, \quad f''(x) = \sin x.$$

$$f(1) \approx -0.341470984807896506652502321630000000 < 0,$$
$$f(2) \approx 0.59070257317431830460398013409 0 > 0.$$

因此, $[1, 2]$ 是一个根的隔离区间.并且在 $[1, 2]$ 上 $f'(x) > 0$, $f''(x) = \sin x > 0$.故选择 $x = 2$ 作为初始点.

使用 Sowya 编程, 得到近似解为 $x \approx 1.49730038909589231468152154094 8$.

详见 使用牛顿切线法求方程实根的近似值. ∎

例

用牛顿迭代法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 实根的近似值, 使误差不超过 10^{-100}.

例

用牛顿迭代法求方程 $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 实根的近似值, 使误差不超过 10^{-100}.

设 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, 求导

```
>> diff(x^3+4x^2-10)
out> 3x^2+8x^1
```

例

用牛顿迭代法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 实根的近似值, 使误差不超过 10^{-100}.

设 $f(x)=x^3+4x^2-10$, 求导

```
>> diff(x^3+4x^2-10)
out> 3x^2+8x^1
```

因此 $f'(x)=3x^2+8x$.

例

用牛顿迭代法求方程 $x^3+4x^2-10=0$ 实根的近似值, 使误差不超过 10^{-100}.

设 $f(x)=x^3+4x^2-10$, 求导

```
>> diff(x^3+4x^2-10)
out> 3x^2+8x^1
```

因此 $f'(x)=3x^2+8x$.计算 $f(x)$ 除以 $f'(x)$ 的商和余式.

```
>> (x^3+4x^2-10)/(3x^2+8x^1)
in> (x^3+4x^2-10)/(3x^2+8x^1)

out>
 quotient> q(x) = 1|3x+4|9
remainder> r(x) = -32|9x-10

1|3x^1+4|9
```

计算 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 得

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n - \frac{4}{9} + \frac{\frac{32}{9}x_n + 10}{3x_n^2 + 8x_n}.$$

计算 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, 得

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n - \frac{4}{9} + \frac{\frac{32}{9}x_n + 10}{3x_n^2 + 8x_n}.$$

设置计算精度为 `100`.

```
>> setprecision(100)
Now the precision is: 100
```

计算 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，得

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n - \frac{4}{9} + \frac{\frac{32}{9}x_n + 10}{3x_n^2 + 8x_n}.$$

设置计算精度为 `100`.

```
>> setprecision(100)
Now the precision is: 100
```

然后使用printRecursiveSeries()函数计算迭代公式

```
>> printRecursiveSeries(2/3*x_n-4/9+(32/9*x_n+10)/(3*x_n^2+8*x_n),x_n
    ,1,100,\n,linenumber)
```

上面第三个参数 `1` 是 `x_n` 的初值(即可以认为 $x_0 = 1$).

上面第三个参数 `1` 是 `x_n` 的初值(即可以认为 $x_0 = 1$).当然初值可以选取其他值.

上面第三个参数 1 是 x_n 的初值(即可以认为 $x_0 = 1$).当然初值可以选取其他值.由于精度为100, 计算的时间稍长. 最终列举最后一项的值

```
[100]
    1.36523001341409684576080682898166607833116474677126507182378735474550293319
```

上面第三个参数 1 是 x_n 的初值(即可以认为 $x_0 = 1$).当然初值可以选取其他值.由于精度为100, 计算的时间稍长. 最终列举最后一项的值

```
[100]
    1.3652300134140968457608068289816660783311647467712650718237873547455029331 9
```

验证

```
>> x
    =1.365230013414096845760806828981666078331164746771265071823787354745502933 1

------------------------------
>> x^3+4*x^2-10

out>
    -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
```

上面第三个参数 1 是 x_n 的初值(即可以认为 $x_0 = 1$).当然初值可以选取其他值.由于精度为100, 计算的时间稍长. 最终列举最后一项的值

```
[100]
    1.3652300134140968457608068289816660783311647467712650718237873547455029331
```

验证

```
>> x
    =1.365230013414096845760806828981666078331164746771265071823787354745502933

-----------------------------
>> x^3+4*x^2-10

out>
    -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
```

详见 牛顿迭代法的例子

Sowya

Sowya 主页

下载

- Windows
  Sowya.7z
- Linux
  sowya32

使用教程