不定积分

徐海峰整理

November 8, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

研究的问题

前面我们研究了函数的可导性质.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.自然, 我们要问:

- 方程 $(*)$ 对所有 f 都存在解吗?

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.自然, 我们要问:

- 方程 $(*)$ 对所有 f 都存在解吗?
- 如果 F 是一个解, 则显然 $F + C$ (C 为常数)也是一个解, 除此之外还有其他的解吗?

基本定理

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon|x - a|\} \subset [a, b].$$

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon|x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.我们断言 $\xi = b$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.我们断言 $\xi = b$.先简要说明 $\xi \in A$. □

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - \delta - a|.$$

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon |\xi - \delta - a|.$$

两边取极限 $\delta \to 0^+$, 由 f 的连续性,

$$|f(\xi) - f(a)| \leqslant \varepsilon |\xi - a|.$$

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - \delta - a|.$$

两边取极限 $\delta \to 0^+$, 由 f 的连续性,

$$|f(\xi) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - a|.$$

即 $\xi \in A$.

$\square$

续

Proof.

下面论述 $\xi = b$.

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

续

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta)-f(\xi)}{\zeta-\xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta)-f(\xi)}{\zeta-\xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta)-f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta-\xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned}|f(\zeta)-f(a)| &\leqslant |f(\zeta)-f(\xi)| + |f(\xi)-f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta-\xi| + \varepsilon|\xi-a| = \varepsilon|\zeta-a|.\end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,

续

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,因此只能有 $\xi = b$. 即 $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon|a - b|$.

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,因此只能有 $\xi = b$. 即 $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon|a - b|$. 因为 ε 是任取的, 令 $\varepsilon \to 0^+$, 上式表明 $f(a) = f(b)$. □

原函数的定义

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

因此原函数不唯一.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

因此原函数不唯一.

由刚才的命题知, 若 $G'(x) = f(x)$, 则 $F(x) - G(x) = C$.

定义 (不定积分)

设函数 f 在区间 I 上有原函数, 则我们用记号

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 的原函数的一般表达式, 即如果 F 为 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in I,$$

期中 C 为常数.

定义 (不定积分)

设函数 f 在区间 I 上有原函数, 则我们用记号

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 的原函数的一般表达式, 即如果 F 为 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in I,$$

期中 C 为常数.

我们后面讨论记号 $\mathrm{d}x$ 的作用.

不定积分的性质

命题

如果 F 是 f 的原函数, 则 $\mathrm{d}F = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, 因此,

$$d\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C.$$

不定积分的性质

命题

若 f 和 g 都有原函数, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

不定积分的性质

命题

若 f 和 g 都有原函数, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则

- $\displaystyle\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x$, 这里 $\lambda \neq 0$.

不定积分的性质

命题

若 f 和 g 都有原函数, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则

- $\displaystyle\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x$, 这里 $\lambda \neq 0$.
- $\displaystyle\int \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\mathrm{d}x$, 这里 λ 和 μ 不同时为零.

命题

若 f 和 g 都有原函数, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则

- $\displaystyle\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x$, 这里 $\lambda \neq 0$.
- $\displaystyle\int (\lambda f(x) + \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\mathrm{d}x$, 这里 λ 和 μ 不同时为零.

Proof.

直接验证. □

常见函数的不定积分

$C' = 0$

$$\int 0\mathrm{d}x = C$$

$(e^x)' = e^x$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$[\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$

$$\int \tanh^2 x \mathrm{d}x = x - \tanh x + C$$

$(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$

$$\int \coth^2 x \mathrm{d}x = x - \coth x + C$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$$

$(x \ln x)' = \ln x + 1$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = -\arccos x + C$$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = -\mathrm{arccot}\, x + C$$

$(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$(x \arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \arcsin x \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x.$

例

求 $\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big),$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\Big[\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\ln|1-x| + \ln|1+x|\Big] + C = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| + C.\end{aligned}$$

∎

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x.$

解.

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big),$$

从而

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\Big[\int \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[-\ln|1-x| + \ln|1+x|\Big] + C = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big| + C.\end{aligned}$$

∎

因此

$$\int \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1-x}{1+x}\Big| + C.$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

注意到 $x = f(g(x))$, 以及条件 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$xg'(x) = f(g(x))g'(x) = F'(g(x))g'(x) = [F(g(x))]'.$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

注意到 $x = f(g(x))$, 以及条件 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$xg'(x) = f(g(x))g'(x) = F'(g(x))g'(x) = [F(g(x))]'.$$

因此

$$[xg(x) - F(g(x))]' = g(x).$$

猜测原函数

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

因此

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$$

∎

猜测原函数

例

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

猜测原函数

例

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

利用公式求解

例

求不定积分 $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x.$

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x$.

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x.$

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x) = \ln|\sin x|$,

利用公式求解

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x$.

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x) = \ln|\sin x|$,代入公式

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C,$$

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x$.

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x) = \ln|\sin x|$,代入公式

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C,$$

得

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x &= x\operatorname{arccot} x - \ln|\sin \operatorname{arccot} x| + C \\ &= x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

换元法

不定积分的符号

到目前为止, 我们在计算 f 的不定积分时并没有用到被积表达式中的 $\mathrm{d}x$. 如果 $f(x)$ 的不定积分记作

$$\int f(x)$$

或其他符号, 会出现什么问题.

不定积分的符号

到目前为止, 我们在计算 f 的不定积分时并没有用到被积表达式中的 $\mathrm{d}x$. 如果 $f(x)$ 的不定积分记作

$$\int f(x)$$

或其他符号, 会出现什么问题.

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$,

例

求不定积分 $\displaystyle\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$, 则

$$\int (2x)^n = \int t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} (2x)^{n+1} + C.$$

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$, 则

$$\int (2x)^n = \int t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} (2x)^{n+1} + C.$$

第一个等号是换元, 最后一个等号是回代. 要求能换元及可以回代是很自然的想法, 但是所得两个结果不一致.

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$, 则

$$\int (2x)^n = \int t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} (2x)^{n+1} + C.$$

第一个等号是换元, 最后一个等号是回代. 要求能换元及可以回代是很自然的想法, 但是所得两个结果不一致.

Q. 请问问题出在哪里? □

若令 $x = \varphi(t)$, φ 可导.

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 将 x 换为 $\varphi(t)$, 应有

$$\int f(x)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 将 x 换为 $\varphi(t)$, 应有

$$\int f(x)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

$f(x)$ 对应到 $f(\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, 两者并不相等, 但是 $f(x)\mathrm{d}x$ 却和 $f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi$ 相等.

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

当换元时, 比如令 $x=\varphi(t)$ (φ 可导), 则直接代入, 得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

当换元时, 比如令 $x=\varphi(t)$ (φ 可导), 则直接代入, 得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这样保证了换元和回代的正确性.