



不定积分的计算

徐海峰整理

December 2, 2025

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

换元积分法

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F , 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du = F(\phi(x)) + C;$$

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F , 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(u)du = F(\phi(x)) + C;$$

(2) 设 ϕ 可逆, 且其逆可微, $\phi(I) = J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G , 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)du = G(\phi^{-1}(u)) + C.$$

Proof.

证明是直接的.

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

$$[G(\phi^{-1}(u))]'_u = G'(x) \cdot x'_u = G'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x))\phi'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x)) = f(u).$$

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$[F(\phi(x))]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

$$[G(\phi^{-1}(u))]'_u = G'(x) \cdot x'_u = G'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x))\phi'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x)) = f(u).$$

这里的 (1) 被称为第一类换元法, (2) 被称为第二类换元法.

□

例

求 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$, 这里 $a > 0$.

例

求 $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx$, 这里 $a > 0$.

解.

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$



例

求 $\int \sec x dx$.

例

求 $\int \sec x dx$.

解.

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} d(\sin x),$$

例

求 $\int \sec x dx$.

解.

$$\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1 - \sin^2 x} d(\sin x),$$

令 $t = \sin x$, 则上式

$$\begin{aligned} &= \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right|^2 + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

类似地, 可证明

例

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

类似地, 可证明

例

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

另一种证法是利用之前的结果.

类似地, 可证明

例

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

另一种证法是利用之前的结果. 注意到 $\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos(x - \frac{\pi}{2})} = \sec(x - \frac{\pi}{2})$,

Proof.

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \sec(x - \frac{\pi}{2}) dx = \ln |\sec(x - \frac{\pi}{2}) + \tan(x - \frac{\pi}{2})| + C \\ &= \ln |\csc x - \cot x| + C \end{aligned}$$

□

重要的公式

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x,$$

$$\int \tan x dx = \ln |\sec x| + C,$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C.$$

分部积分法

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在.

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数, 且

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

故命题得证.



分部积分法也可以写为

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

例

求 $\int e^x \sin x dx$.

例

求 $\int e^x \sin x dx$.

解.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= -\int e^x d \cos x = -\left[e^x \cos x - \int \cos x de^x\right] \\&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x \\&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x de^x \\&= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

例

求 $\int e^x \sin x dx$.

解.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= - \int e^x d \cos x = - \left[e^x \cos x - \int \cos x de^x \right] \\&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + \int e^x d \sin x \\&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x de^x \\&= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx,\end{aligned}$$

这推出

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

例

求 $\int \sec^3 x dx$.

例

求 $\int \sec^3 x dx$.

解.

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d \tan x = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x d \sec x \\&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,\end{aligned}$$

例

求 $\int \sec^3 x dx$.

解.

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \int \sec x \cdot \sec^2 x dx = \int \sec x d \tan x = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x d \sec x \\&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x dx = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,\end{aligned}$$

这推出

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x dx \\&= \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$;

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$; $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$; $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

当 $n \geq 1$ 时,

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$; $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \left[\int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx - \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \right] \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n},$$

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n},$$

这就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}.$$

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2 + a^2)^n},$$

这就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}.$$

由此可以求出所有的 I_n .



例

计算 $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$.

例

计算 $\int \sin^n x dx$, $\int \cos^n x dx$.

解. 记 $I_n = \int \sin^n x dx$, 利用分部积分,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = - \int \sin^{n-1} x d \cos x \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \int \cos x d \sin^{n-1} x \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \int \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x dx \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{n-2} x dx \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

解. 因此,

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)I_{n-2},$$

解. 因此,

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)I_{n-2},$$

这推出

$$I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

解. 类似的, 若记 $J_n = \int \cos^n x dx$, 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int \cos^{n-1} x d \sin x = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x d \cos^{n-1} x \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n. \end{aligned}$$

解. 类似的, 若记 $J_n = \int \cos^n x dx$, 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int \cos^{n-1} x d \sin x = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x d \cos^{n-1} x \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n. \end{aligned}$$

于是

$$n J_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) J_{n-2},$$

解. 类似的, 若记 $J_n = \int \cos^n x dx$, 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int \cos^{n-1} x d \sin x = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x d \cos^{n-1} x \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) J_{n-2} - (n-1) J_n. \end{aligned}$$

于是

$$n J_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) J_{n-2},$$

这推出

$$J_n = \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

欢迎访问 atzjg.net