数项级数

徐海峰整理

December 6, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

级数收敛与发散的概念

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为无穷级数,

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为**无穷级数**,a_n 称为**通项**或**一般项**,

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ 为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为**无穷级数**,a_n 称为**通项**或**一般项**,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的**第 n 个部分和**.

定义

如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**,

定义

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**,其**和**为 S, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

定义

如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**,其**和**为 S, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

否则就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.

定义

如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**,其**和**为 S, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

否则就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**.级数的收敛或发散性质统称为**敛散性**.

命题

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则通项 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

级数收敛的必要条件

命题

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则通项 $a_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Proof.

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \quad (n \to \infty).$$

$\square$

级数收敛的充要条件

命题 (Cauchy 准则)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall\ p \geqslant 1.$$

命题 (Cauchy 准则)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon, \quad \forall\ p \geqslant 1.$$

Proof.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛当且仅当数列 $\{S_n\}$ 收敛. 而

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

因此, 利用数列收敛的 Cauchy 准则即证. □

例子

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 当 $n > 1$ 时,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 当 $n > 1$ 时,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

于是有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 当 $n > 1$ 时,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

于是有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

由 Cauchy 准则, 原级数收敛.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解. 当 $n > 1$ 时,

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

于是有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

由 Cauchy 准则, 原级数收敛.（事实上, 以后将证明其和为 $\frac{\pi^2}{6}$.）∎

调和级数

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 的敛散性.

解. 当 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2},$$

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

解. 当 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{1}{2},$$

由 Cauchy 准则, 原级数发散. ∎

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

解. 如果级数收敛, 则 $\sin n \to 0 \ (n \to \infty)$.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

解. 如果级数收敛, 则 $\sin n \to 0$ $(n \to \infty)$.由等式

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$$

知, 此时也有 $\cos n \to 0$ $(n \to \infty)$.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

解. 如果级数收敛, 则 $\sin n \to 0$ $(n \to \infty)$.由等式

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$$

知, 此时也有 $\cos n \to 0$ $(n \to \infty)$.但

$$\sin^2 n + \cos^2 n \equiv 1,$$

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

解. 如果级数收敛, 则 $\sin n \to 0$ $(n \to \infty)$.由等式

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$$

知, 此时也有 $\cos n \to 0$ $(n \to \infty)$.但

$$\sin^2 n + \cos^2 n \equiv 1,$$

这就导出了矛盾, 这说明原级数发散. ∎

几何级数

例

设 $q > 0$, 则当 $q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛; $q \geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散.

几何级数

例

设 $q > 0$, 则当 $q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛; $q \geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散.

Proof.

当 $0 < q < 1$ 时,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \to \frac{q}{1 - q},$$

此时原级数收敛;

例

设 $q > 0$, 则当 $q < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛; $q \geqslant 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散.

Proof.

当 $0 < q < 1$ 时,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q \cdot (1 - q^n)}{1 - q} \to \frac{q}{1 - q},$$

此时原级数收敛;当 $q \geqslant 1$ 时, $q^n \not\to 0$, 此时原级数发散. $\square$

一些性质

命题

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

命题

(1) 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *和* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *均收敛, 则* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *也收敛, 且*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

Proof.

(1) 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$.

命题

(1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *和* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *均收敛, 则* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *也收敛, 且*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

Proof.

(1) 记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_n$. 由条件, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 和 $\lim_{n\to\infty} T_n$ 均存在且有限, 分别记为

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad \lim_{n\to\infty} T_n = T.$$

□

Proof.

则

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n + \mu T_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} T_n = \lambda S + \mu T.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Proof.

则

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n + \mu T_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} T_n = \lambda S + \mu T.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 删除前面若干项: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$,

Proof.

则

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n + \mu T_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} T_n = \lambda S + \mu T.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 删除前面若干项: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$,则新的级数的前 N 项 $(N > m)$ 为

$$T_N = S_{N+m} - (a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}),$$

Proof.

则

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n + \mu T_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} T_n = \lambda S + \mu T.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 删除前面若干项: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$,则新的级数的前 N 项 $(N > m)$ 为

$$T_N = S_{N+m} - (a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}),$$

因此, T_N 的敛散性与 S_N 的敛散性是相同的.

Proof.

则

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda S_n + \mu T_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} S_n + \mu \lim_{n\to\infty} T_n = \lambda S + \mu T.$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(2) 假设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 删除前面若干项: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$,则新的级数的前 N 项 $(N > m)$ 为

$$T_N = S_{N+m} - (a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}),$$

因此, T_N 的敛散性与 S_N 的敛散性是相同的.同理, 级数在添加有限项后敛散性也不变.

$\square$

习题

证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛. (提示: 用平均值不等式.)

习题

证明: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 也收敛. (提示: 用平均值不等式.)

见问题704.

更多例子

见问题2382