



数列的极限

徐海峰整理

September 25, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

数列

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.)

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为有限数列;

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为**有限数列**;

如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为**有限数列**;

如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则称为**无穷数列**.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为**有限数列**;

如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为**有限数列**;

如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**, 第 n 个项称为数列的**一般项或通项**.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$, (\mathbb{F} 是某个数域.) 该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$, 则称为**有限数列**;

如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**, 第 n 个项称为数列的**一般项或通项**.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也可以看成是函数 $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_+$.

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A ,

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A , 使得 $a_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}_+$,

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A , 使得 $a_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A , 使得 $a_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B ,

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A , 使得 $a_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B , 使得 $a_n \geq B, \forall n \in \mathbb{N}_+$,

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M > 0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leq M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界; 否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A , 使得 $a_n \leq A, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B , 使得 $a_n \geq B, \forall n \in \mathbb{N}_+$, 则称 B 是 $\{a_n\}$ 的一个下界.

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \geq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \geq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \geq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 \leq 改为 $<$

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \geq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 \leq 改为 $<$ (相应的, \geq 改为 $>$),

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \leq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+, m < n$, 都有 $a_m \geq a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 \leq 改为 $<$ (相应的, \geq 改为 $>$), 则称为**严格**单调递增(递减)数列.

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的子数列或子列.

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的子数列或子列.

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的子数列或子列.

子列一般记作 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$,

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的子数列或子列.

子列一般记作 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, 即

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$$

数列极限的定义

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A ,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列没有极限,则称它是发散的.

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A ,对任意给定的正数 ε ,总存在正整数 N ,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个极限,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A ,记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty).$$

如果数列没有极限,则称它是发散的.

显然,常值数列 $\{C\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛,极限就是 C .

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$$\forall \varepsilon > 0,$$

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+,$$

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.}, \text{当 } n > N \text{ 时},$

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.}, \text{当 } n > N \text{ 时, 总有}$

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立,

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A .

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立, 则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A . 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{或} \quad a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0,$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}},$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时,

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ 即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ 即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ 就有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立.

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ 即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ 就有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立. 于是上面的 N 取为 $\left[\frac{1}{3\varepsilon} \right] + 1$ 即可. □

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ 即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ 就有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立. 于是上面的 N 取为 $\left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil + 1$ 即可. □

例子

例

用定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$, 当 $n > N$ 时, 总有

$$\left| \frac{2n + (-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ 即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ 就有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立. 于是上面的 N 取为 $\left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil + 1$ 即可. □

Hint: 证明的过程就是去寻找合适的 N , 使得不等式成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.}, \text{当 } n > N \text{ 时,}$

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此, 若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此, 若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$, 则 $|q|^N < \varepsilon$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此, 若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$, 则 $|q|^N < \varepsilon$, 从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此, 若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$, 则 $|q|^N < \varepsilon$, 从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立. 于是取 $N = \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil + 1$. □

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此, 若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$, 则 $|q|^N < \varepsilon$, 从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立. 于是取 $N = \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil + 1$. □

注: 这里需要了解指数函数 q^x ($0 < |q| < 1$) 在 $(0, \infty)$ 上的单调性.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha \varepsilon}$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha \varepsilon}$, s.t., 当 $n > N$ 时,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$, s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha \varepsilon}$, s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

其中, 我们用到了伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2 + \cdots + \alpha^n > n\alpha.$$

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$, 则 $\frac{1}{|q|} > 1$. 令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha \varepsilon}$, s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

其中, 我们用到了伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2 + \cdots + \alpha^n > n\alpha.$$

故, $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

□

数列极限的性质

数列极限的唯一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 ,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leq |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leq |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leq |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$, 则对于 $\varepsilon = |A - B|/2$, 上式不可能成立.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$. 则任给 $\varepsilon > 0$, $\exists N_1$ 和 N_2 , s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leq |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$, 则对于 $\varepsilon = |A - B|/2$, 上式不可能成立. 故只能 $A = B$. □

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N ,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A|$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A|$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A|\}$,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A|\}$, 则 $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A|\}$, 则 $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. 即 $\{a_n\}$ 有界. \square

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 根据定义, 对于给定的 $\varepsilon = 1$, 存在 N , 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |A|\}$, 则 $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. 即 $\{a_n\}$ 有界. \square

推论. 无界数列必定发散.

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.)

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{s.t.},$ 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

而 $A - \varepsilon > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$ (或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形 ($A < 0$ 时类似.) 设 $A > 0$, 取 $\varepsilon < A$, 根据定义, 对于此 $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

而 $A - \varepsilon > 0$, 故 $a_n > 0$ (这里 $n > N$).

□

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 总有}$

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$, s.t., 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k > n_N \geq N$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 总有}$

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k > n_N \geq N$, 从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.}, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 总有}$

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k > n_N \geq N$, 从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

故根据定义,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 则其任一子数列也收敛于 A .

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \text{ s.t.},$ 当 $n > N$ 时, 总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此, 对于上面任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时, $n_k > n_N \geq N$, 从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

故根据定义, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$.

□

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

Proof.

$\forall M > 0, \exists N = \underline{[(M + 1)^2] + 1}$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} > M.$$

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

Proof.

$\forall M > 0, \exists N = \underline{[(M + 1)^2] + 1}$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} > M.$$

事实上, 令 $t = \sqrt{n}$, 则 $n = t^2$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} = \sqrt{t^2 - t} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

Proof.

$\forall M > 0, \exists N = \underline{[(M + 1)^2] + 1}$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} > M.$$

事实上, 令 $t = \sqrt{n}$, 则 $n = t^2$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} = \sqrt{t^2 - t} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n - \sqrt{n}} > M$, 则 $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > M^2$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

Proof.

$\forall M > 0, \exists N = \underline{[(M + 1)^2] + 1}$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} > M.$$

事实上, 令 $t = \sqrt{n}$, 则 $n = t^2$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} = \sqrt{t^2 - t} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n - \sqrt{n}} > M$, 则 $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > M^2$. 由于 $t = \sqrt{n} \geq 1$, 故此等价于 $t - \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}}$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty$.

Proof.

$\forall M > 0, \exists N = \underline{[(M + 1)^2] + 1}$, 当 $n > N$ 时,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} > M.$$

事实上, 令 $t = \sqrt{n}$, 则 $n = t^2$,

$$\sqrt{n - \sqrt{n}} = \sqrt{t^2 - t} = \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n - \sqrt{n}} > M$, 则 $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > M^2$. 由于 $t = \sqrt{n} \geq 1$, 故此等价于 $t - \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}}$. 即 $\sqrt{n} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$. □

续

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

即可.

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

即可. 注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

即可. 注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

若令 $N > (M + 1)^2$, 则 N 满足上面的 (*) 式. 因此 N 是存在的, 取 $N = [(M + 1)^2] + 1$ 即可.

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \quad (*)$$

即可. 注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

若令 $N > (M + 1)^2$, 则 N 满足上面的 (*) 式. 因此 N 是存在的, 取 $N = [(M + 1)^2] + 1$ 即可. 根据定义,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = +\infty.$$



例题

例

研究数列 $\{\sin n\}$ 的敛散性.

解. 这个数列是发散的. ■

习题

设 $\alpha > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

习题

习题

设 $\alpha > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

习题

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

习题

习题

设 $\alpha > 0$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

习题

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

欢迎访问 atzjg.net