数列的极限

徐海峰

September 22, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

数列

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,则称为**有限数列**;

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,则称为**有限数列**;
如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列，记为 $\{a_n\}_{n=1}^N$,则称为**有限数列**;
如果是无限个数组成的数列，记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,则称为**无穷数列**.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,则称为**有限数列**;
如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**,

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,则称为**有限数列**;
如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**,第 n 个项称为数列的**一般项**或**通项**.

数列的概念

所谓数列即排成一列的数,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

这里 $a_i \in \mathbb{F}$,($\mathbb{F}$ 是某个数域.)该序列通常记作 $\{a_n\}$.

如果是有限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{N}$,则称为**有限数列**;
如果是无限个数组成的数列, 记为 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,则称为**无穷数列**.

数列中每个数称为该数列的**项**,第 n 个项称为数列的**一般项**或**通项**.

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也可以看成是函数 $f: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}_+$.

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n \in \mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n| \leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,使得 $a_n \leqslant A, \forall n \in \mathbb{N}_+$,

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,使得 $a_n\leqslant A,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$,则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,使得 $a_n\leqslant A,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$,则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B,

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,使得 $a_n\leqslant A,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$,则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B,使得 $a_n\geqslant B,\ \forall n\in\mathbb{N}_+$,

有界数列和无界数列

定义

对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正数 $M>0$, 使得对所有 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的(或称该数列是有界数列), M 是它的一个上界;否则, 称数列 $\{a_n\}$ 是无界的(或称该数列是无界数列).

若存在数 A,使得 $a_n\leqslant A, \forall n\in\mathbb{N}_+$,则称 A 是 $\{a_n\}$ 的一个上界.

若存在数 B,使得 $a_n\geqslant B, \forall n\in\mathbb{N}_+$,则称 B 是 $\{a_n\}$ 的一个下界.

单调数列

由于数列也可以看成是函数，因此也有单调的概念.

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \geqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \geqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \geqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 $\leqslant$ 改为 $<$

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \geqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的, $\geqslant$ 改为 $>$),

单调数列

由于数列也可以看成是函数, 因此也有单调的概念.

定义

若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \leqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递增数列;
若 $\forall m, n \in \mathbb{N}_+$, $m < n$, 都有 $a_m \geqslant a_n$, 则称 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.

当上面的 $\leqslant$ 改为 $<$(相应的, $\geqslant$ 改为 $>$),则称为严格单调递增(递减)数列.

子数列

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置，这样得到的数列称为原数列的**子数列**或**子列**.

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的**子数列**或**子列**.

子数列

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置，这样得到的数列称为原数列的**子数列**或**子列**.

子列一般记作 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$，

定义

在数列 $\{a_n\}$ 中任意抽取有限或无穷多项并保持这些项在原数列中的相对位置, 这样得到的数列称为原数列的**子数列**或**子列**.

子列一般记作 $\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$,即

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

数列极限的定义

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列，

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个极限**,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个极限**,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A,

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个极限**,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \to A \ \ (n \to \infty).$$

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个极限**,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \to A \ \ (n \to \infty).$$

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的**一个极限**,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \to A \ \ (n \to \infty).$$

如果数列没有极限, 则称它是**发散**的.

数列极限的定义

定义

设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个数列,若存在某个常数 A,对任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时,总有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立,则称常数 A 为数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个**极限**,或称数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \text{或} \quad a_n \to A \ \ (n \to \infty).$$

如果数列没有极限, 则称它是**发散**的.

显然, 常值数列 $\{C\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 极限就是 C.

$\varepsilon - \delta$ 语言

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0$,

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+,$

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon-\delta$ 语言.

定义

$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{Z}^{+}$,s.t., 当 $n>N$ 时,

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon-\delta$ 语言.

定义

$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n>N$ 时,总有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立,

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon - \delta$ 语言.

定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

成立,则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A.

我们将极限的定义翻译为如下简洁的 $\varepsilon-\delta$ 语言.

定义

$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n>N$ 时,总有

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

成立,则称 $\{a_n\}$ 的极限为 A.记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad \text{或} \quad a_n\to A\ (n\to\infty).$$

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

例子

例

用定义证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}},$

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall\varepsilon>0,\exists N=$ <u>待定</u>,当 $n>N$ 时,

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N =$ <u>待定</u>,当 $n > N$ 时,总有

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$,当 $n > N$ 时,总有

$$\left| \frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall\varepsilon>0,\exists N=$ 待定,当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}<\frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N}<\varepsilon$即 $N>\frac{1}{3\varepsilon}$

例子

例

用定义证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{待定}$,当 $n > N$ 时,总有

$$\left| \frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N} < \varepsilon$即 $N > \frac{1}{3\varepsilon}$就有不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立.

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall\varepsilon>0,\exists N=$ <u>待定</u>,当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}<\frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N}<\varepsilon$即 $N>\frac{1}{3\varepsilon}$就有不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立.于是上面的 N 取为 $\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$ 即可. □

例子

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall\varepsilon>0, \exists N=$ <u>待定</u>,当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}<\frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N}<\varepsilon$即 $N>\frac{1}{3\varepsilon}$就有不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立.于是上面的 N 取为 $\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$ 即可. $\square$

例

用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+(-1)^n}{3n}=\frac{2}{3}$.

Proof.

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\underline{\text{待定}}$,当 $n>N$ 时,总有

$$\left|\frac{2n+(-1)^n}{3n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3n}<\frac{1}{3N}$$

因此, 只要 $\frac{1}{3N}<\varepsilon$即 $N>\frac{1}{3\varepsilon}$就有不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立.于是上面的 N 取为 $\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$ 即可. $\square$

Hint: 证明的过程就是去寻找合适的 N, 使得不等式成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$,s.t.,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N =$ <u>待定</u>,s.t.,当 $n > N$ 时,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N =$ <u>待定</u>,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N =$ 待定,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N = \underline{待定}$,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,若 $N > \log_{|q|}\varepsilon$,

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{待定}$,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$,则 $|q|^N < \varepsilon$,

例

证明: 当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q=0$ 时, 显然成立.下设 $0<|q|<1$.

$\forall\varepsilon>0, \exists N=$ 待定,s.t.,当 $n>N$ 时,总有

$$|q^n-0|=|q|^n<|q|^N$$

因此,若 $N>\log_{|q|}\varepsilon$,则 $|q|^N<\varepsilon$,从而 $|q^n-0|<\varepsilon$ 成立.

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立. 下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall\varepsilon > 0, \exists N = \underline{\text{待定}}$,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$,则 $|q|^N < \varepsilon$,从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立.于是取 $N = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$. $\square$

例子

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

$q = 0$ 时, 显然成立.下设 $0 < |q| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \underline{待定}$,s.t.,当 $n > N$ 时,总有

$$|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N$$

因此,若 $N > \log_{|q|} \varepsilon$,则 $|q|^N < \varepsilon$,从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立.于是取 $N = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$. □

注: 这里需要了解指数函数 q^x $(0 < |q| < 1)$ 在 $(0, \infty)$ 上的单调性.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,则 $\frac{1}{|q|} > 1$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0<|q|<1$,则 $\frac{1}{|q|}>1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|}-1>0$.

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,则 $\frac{1}{|q|} > 1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,则 $\frac{1}{|q|} > 1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0<|q|<1$,则 $\frac{1}{|q|}>1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|}-1>0$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$,s.t., 当 $n>N$ 时,

上面例子的初等证法

例

证明: 当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0 < |q| < 1$,则 $\frac{1}{|q|} > 1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$,s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

上面例子的初等证法

例

证明：当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0<|q|<1$,则 $\frac{1}{|q|}>1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|}-1>0$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$,s.t., 当 $n>N$ 时,

$$|q^n-0| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

其中，我们用到了伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2+\cdots+\alpha^n > n\alpha.$$

上面例子的初等证法

例

证明：当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Proof.

设 $0<|q|<1$,则 $\frac{1}{|q|}>1$.令 $\alpha := \frac{1}{|q|}-1>0$.

$\forall \varepsilon>0, \exists N>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$,s.t.，当 $n>N$ 时，

$$|q^n-0| = |q|^n = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon,$$

其中，我们用到了伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2+\cdots+\alpha^n > n\alpha.$$

故，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. $\square$

数列极限的性质

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,

数列极限的唯一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限，则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$,

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$, 则对于 $\varepsilon = |A - B|/2$, 上式不可能成立.

数列极限的惟一性

命题

若数列 $\{a_n\}$ 有极限, 则其极限是唯一的.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$.则任给 $\varepsilon > 0$,$\exists N_1$ 和 N_2,s.t., 当 $n > N_1$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时,有

$$|A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leqslant |a_n - A| + |a_n - B| < 2\varepsilon.$$

若 $A \neq B$, 则对于 $\varepsilon = |A - B|/2$, 上式不可能成立.故只能 $A = B$. $\square$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A|$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A|$$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |A|\}$,

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |A|\}$,则 $|a_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |A|\}$,则 $|a_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.即 $\{a_n\}$ 有界. $\square$

数列极限的有界性

命题

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界.

Proof.

设 $\lim\limits_{n\to} a_n = A$.根据定义,对于给定的 $\varepsilon = 1$,存在 N,当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < 1.$$

这推出

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leqslant |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

令 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |A|\}$,则 $|a_n| \leqslant M$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.即 $\{a_n\}$ 有界. $\square$

推论. 无界数列必定发散.

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A>0$(或 $A<0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, 都有 $a_n>0$(或 $a_n<0$).

Proof.

只证明 $A>0$ 的情形($A<0$ 时类似.)设 $A>0$,取 $\varepsilon<A$,根据定义,对于此 $\varepsilon>0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n>N$ 时,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

而 $A - \varepsilon > 0$,

收敛数列的保号性

命题

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, 且 $A > 0$(或 $A < 0$), 则 $\exists N \in \mathbb{Z}^+$, 当 $n > N$ 时, 都有 $a_n > 0$(或 $a_n < 0$).

Proof.

只证明 $A > 0$ 的情形($A < 0$ 时类似.)设 $A > 0$,取 $\varepsilon < A$,根据定义,对于此 $\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

这等价于

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

而 $A - \varepsilon > 0$,故 $a_n > 0$(这里 $n > N$). $\square$

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,$n_k > n_N \geqslant N$,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,$n_k > n_N \geqslant N$,从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,$n_k > n_N \geqslant N$,从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

故根据定义,

收敛数列的子列也收敛

命题

若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 则其任一子数列也收敛于 A.

Proof.

任取 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$.由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,故 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N \in \mathbb{Z}^+$,s.t., 当 $n > N$ 时,总有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

因此,对于上面任给的 $\varepsilon > 0$,存在 $K = N$, 当 $k > K$ 时,$n_k > n_N \geqslant N$,从而

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

故根据定义, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. $\square$

例

按照数列极限的定义证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n-\sqrt{n}} = +\infty$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.

Proof.

$\forall M>0$, $\exists N=\underline{[(M+1)^2]+1}$, 当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}>M.$$

例

按照数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.

Proof.

$\forall M>0$, $\exists N=\underline{[(M+1)^2]+1}$, 当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}>M.$$

事实上, 令 $t=\sqrt{n}$, 则 $n=t^2$,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}=\sqrt{t^2-t}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}},$$

例

按照数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.

Proof.

$\forall M>0$, $\exists N=\underline{[(M+1)^2]+1}$, 当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}>M.$$

事实上, 令 $t=\sqrt{n}$, 则 $n=t^2$,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}=\sqrt{t^2-t}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n-\sqrt{n}}>M$, 则 $(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>M^2$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.

Proof.

$\forall M>0$, $\exists N=\underline{[(M+1)^2]+1}$, 当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}>M.$$

事实上, 令 $t=\sqrt{n}$, 则 $n=t^2$,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}=\sqrt{t^2-t}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n-\sqrt{n}}>M$, 则 $(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>M^2$. 由于 $t=\sqrt{n}\geqslant 1$, 故此等价于 $t-\frac{1}{2}>\sqrt{M^2+\frac{1}{4}}$.

例

按照数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty.$

Proof.

$\forall M>0$, $\exists N=\underline{[(M+1)^2]+1}$, 当 $n>N$ 时,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}>M.$$

事实上, 令 $t=\sqrt{n}$, 则 $n=t^2$,

$$\sqrt{n-\sqrt{n}}=\sqrt{t^2-t}=\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}},$$

要使 $\sqrt{n-\sqrt{n}}>M$, 则 $(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}>M^2$. 由于 $t=\sqrt{n}\geqslant 1$, 故此等价于 $t-\frac{1}{2}>\sqrt{M^2+\frac{1}{4}}$.即 $\sqrt{n}>\sqrt{M^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$. $\square$

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \tag{*}$$

即可.

续

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \tag{*}$$

即可.注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

续

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \tag{*}$$

即可.注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

若令 $N > (M+1)^2$, 则 N 满足上面的 (*) 式. 因此 N 是存在的, 取 $N = [(M+1)^2] + 1$ 即可.

Proof.

由于 $n > N$, 故 N 只需满足

$$\sqrt{N} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \tag{*}$$

即可.注意到

$$M + \frac{1}{2} > \sqrt{M^2 + \frac{1}{4}},$$

若令 $N > (M+1)^2$, 则 N 满足上面的 (*) 式. 因此 N 是存在的, 取 $N = [(M+1)^2] + 1$ 即可.根据定义,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n - \sqrt{n}} = +\infty.$$

□

习题 1.2

书本 p.19

- 2. (2),
- 3,
- 4,
- 5.