无穷小与无穷大

徐海峰

September 19, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

无穷小与无穷大

无穷小的定义

定义

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.

无穷小的定义

定义

若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.记作 $f(x) \to 0 (x \to x_0)$.

无穷小的定义

定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量或无穷小.记作 $f(x) \to 0(x \to x_0)$.

定义

若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小量或无穷小.

无穷小的定义

定义

若 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量或无穷小.记作 $f(x) \to 0(x \to x_0)$.

定义

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小量或无穷小.记作 $f(x) \to 0(x \to \infty)$.

无穷小的定义

定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.记作 $f(x) \to 0(x \to x_0)$.

定义

若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.记作 $f(x) \to 0(x \to \infty)$.

注

(1) 对于 $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ 这些情形可类似定义在这些过程下的无穷小.

无穷小的定义

定义

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.记作 $f(x) \to 0 (x \to x_0)$.

定义

若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的**无穷小量**或**无穷小**.记作 $f(x) \to 0 (x \to \infty)$.

注

(1) 对于 $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ 这些情形可类似定义在这些过程下的无穷小.

(2) $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 也可以记为 $f(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$.

无穷大的定义

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时，总有

$$|f(x)| > M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大量（或无穷大）.

无穷大的定义

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 若 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有

$$|f(x)| > M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的**无穷大量（或无穷大）**.记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

无穷大的定义

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义, 若 $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有

$$|f(x)| > M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大量（或无穷大）. 记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

定义

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -B) \cup (B, +\infty)$ 上有定义, B 充分大. 若 $\forall M > 0$, $\exists N > 0$, s.t., 当 $|x| > N$ 时, 总有

$$|f(x)| > M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷大量（或无穷大）.

无穷大的定义

定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，若 $\forall M>0$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，总有

$$|f(x)|>M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量（或无穷大）.记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

定义

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-B)\cup(B,+\infty)$ 上有定义，B 充分大．若 $\forall M>0$, $\exists N>0$, s.t., 当 $|x|>N$ 时，总有

$$|f(x)|>M,$$

则称 $f(x)$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷大量（或无穷大）.记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

理解无穷小与无穷大

无穷小（无穷大）是指一个函数在自变量趋于某一点（∞ 也认为是一点）时极限为0或∞的过程.

理解无穷小与无穷大

无穷小（无穷大）是指一个函数在自变量趋于某一点（∞ 也认为是一点）时极限为0或∞的过程.

不能将某个具体的数（除0之外）认为是无穷小.

理解无穷小与无穷大

无穷小（无穷大）是指一个函数在自变量趋于某一点（∞ 也认为是一点）时极限为0或∞的过程.

不能将某个具体的数（除0之外）认为是无穷小.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 并不是指 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在. 此时极限不存在.

理解无穷小与无穷大

无穷小（无穷大）是指一个函数在自变量趋于某一点（∞ 也认为是一点）时极限为0或∞的过程.

不能将某个具体的数（除0之外）认为是无穷小.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 并不是指 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时极限存在. 此时极限不存在.

有 $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ 六种情形, 在证明一些定理时, 一般只针对某一种情形证明, 比如 $x\to x_0$. 其余类似.

例子

例

说明 $\sqrt{x+1}-1=o(1)\ (x\to 0)$.

例

说明 $\sqrt{x+1}-1=o(1)\ (x\to 0)$.

解.

$$\sqrt{x+1}-1=\frac{\sqrt{x+1}-1}{1}=\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\to 0,\quad (x\to 0),$$

因此, $\sqrt{x+1}-1$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小. ∎

无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大;

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

$\forall M > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, 则由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

$\forall M > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, 则由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - 0| < \varepsilon$.注意到 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

$\forall M > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, 则由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - 0| < \varepsilon$.注意到 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.于是有

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = M.$$

无穷小与无穷大的关系

定理

若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 且 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大; 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(1) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.

$\forall M > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, 则由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\exists \delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - 0| < \varepsilon$.注意到 $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$.于是有

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon} = M.$$

即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$. □

Proof.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 要证 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=0$.

Proof.

(2) 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \frac{1}{\varepsilon}$. 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 故 $\exists \delta_2 > 0$, $(\delta_2 < \delta)$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 总有

$$|f(x)| > M.$$

Proof.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 要证 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

$\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\frac{1}{\varepsilon}$. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 故 $\exists\delta_2>0$, $(\delta_2<\delta)$, s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, 总有

$$|f(x)|>M.$$

于是,

$$\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\frac{1}{M}=\varepsilon.$$

Proof.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 要证 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \frac{1}{\varepsilon}$. 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, 故 $\exists \delta_2 > 0$, $(\delta_2 < \delta)$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 总有

$$|f(x)| > M.$$

于是,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

此即证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. □

无穷小与函数极限的关系

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.
$\forall\varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.而 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

定理

$f(x)$ 在点 x_0 处有极限 A（这里 $A \in \mathbb{R}$）当且仅当 $f(x)$ 可以表示为 $A+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 根据定义, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 都有 $|(f(x) - A) - 0| = |f(x) - A| < \varepsilon$.此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) - A) = 0$.也即 $f(x) - A$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.记 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有 $f(x) = A + \alpha(x)$.

反之, 设 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\alpha(x) \to 0(x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.
$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.而 $\alpha(x) = f(x) - A$, 即有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. $\square$

无穷小的性质

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

对此 ε, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, 故存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|\beta(x) - 0| < \varepsilon$.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

对此 ε, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, 故存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|\beta(x) - 0| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0.$

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

对此 ε, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, 故存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|\beta(x) - 0| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|\alpha(x) + \beta(x) - 0| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < 2\varepsilon.$$

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) + \beta(x)) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$.

对此 ε, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$, 故存在 $\delta_2 > 0$, 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, 有 $|\beta(x) - 0| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, 有

$$|\alpha(x) + \beta(x) - 0| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < 2\varepsilon.$$

注意, $\forall \varepsilon > 0$ 的意思是任取 $\varepsilon > 0$, 这与任取 $2\varepsilon > 0$ 是等价的.

命题

有限个无穷小的和仍是无穷小.

Proof.

只需证明两个无穷小的和仍是无穷小. 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.要证 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)+\beta(x))=0$.

$\forall \varepsilon>0$, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, 故存在 $\delta_1>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时, 有 $|\alpha(x)-0|<\varepsilon$.

对此 ε, 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$, 故存在 $\delta_2>0$, 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, 有 $|\beta(x)-0|<\varepsilon$.

$\forall \varepsilon>0$, 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, 有

$$|\alpha(x)+\beta(x)-0|\leqslant|\alpha(x)|+|\beta(x)|<2\varepsilon.$$

注意, $\forall \varepsilon>0$ 的意思是任取 $\varepsilon>0$, 这与任取 $2\varepsilon>0$ 是等价的.因此, 根据极限的定义, $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x)+\beta(x))=0$. □

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

Proof.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 即存在 $M > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

Proof.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 即存在 $M > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

又设 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$.

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

Proof.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 即存在 $M > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

又设 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, $(\delta < \delta_1)$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$.

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

Proof.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 即存在 $M > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

又设 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, $(\delta < \delta_1)$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$.于是,

$$|f(x)\alpha(x) - 0| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

命题

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

Proof.

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 内有界, 即存在 $M > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.

又设 $\alpha(x) \to 0 (x \to x_0)$. 要证 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, 故存在 $\delta > 0$, $(\delta < \delta_1)$, 使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\alpha(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$.于是,

$$|f(x)\alpha(x) - 0| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

因此 $f(x)\alpha(x)$ 也是 $x \to x_0$ 时的无穷小. $\square$

推论

常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论

推论

常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论

有限个无穷小的乘积仍是无穷小.