极限运算法则

徐海峰

September 30, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

极限的四则运算法则

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, 这里 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在, 则

- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, 这里 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

该定理对 $x \to x_0^-$, $x \to x_0^+$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ 这些极限过程也成立.

函数极限的四则运算法则

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$.

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$.则

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$.则

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad g(x)=B+\beta(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(1) $f(x)\pm g(x)=A\pm B+\alpha(x)\pm\beta(x)$. 由于 $\alpha(x)\pm\beta(x)$ 仍是 $x\to x_0$ 时的无穷小, 故

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

函数极限的四则运算法则

Proof.

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$.则

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

(1) $f(x) \pm g(x) = A \pm B + \alpha(x) \pm \beta(x)$. 由于 $\alpha(x) \pm \beta(x)$ 仍是 $x \to x_0$ 时的无穷小, 故

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

即,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$\square$

Proof.

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= (A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x)) \\
&= AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x),
\end{aligned}
$$

Proof.

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= (A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x)) \\
&= AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x),
\end{aligned}
$$

这里 $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$ 和 $\alpha(x)\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小,

Proof.

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) \\
&= AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x),
\end{aligned}
$$

这里 $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$ 和 $\alpha(x)\beta(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小,因此 $A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ 也是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(2)

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x)) \\ &= AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x), \end{aligned}$$

这里 $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$ 和 $\alpha(x)\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小,因此 $A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ 也是 $x\to x_0$ 时的无穷小.故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB$. $\square$

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\cdot[B\alpha(x)-A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x)-A\beta(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.故取 $\varepsilon=\frac{|B|}{2}$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|\beta(x)-0|<\frac{|B|}{2}$.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.故取 $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时,
$|\beta(x) - 0| < \frac{|B|}{2}$.

因此, $B - \frac{|B|}{2} < B + \beta(x) < B + \frac{|B|}{2}$.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = 0$.故取 $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\beta(x) - 0| < \frac{|B|}{2}$.

因此, $B - \frac{|B|}{2} < B + \beta(x) < B + \frac{|B|}{2}$.若 $B > 0$, 则 $0 < \frac{B}{2} < B + \beta(x) < \frac{3B}{2}$;

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\cdot[B\alpha(x)-A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x)-A\beta(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.故取 $\varepsilon=\frac{|B|}{2}$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|\beta(x)-0|<\frac{|B|}{2}$.

因此, $B-\frac{|B|}{2}<B+\beta(x)<B+\frac{|B|}{2}$.若 $B>0$, 则 $0<\frac{B}{2}<B+\beta(x)<\frac{3B}{2}$;若 $B<0$, 则 $\frac{3B}{2}<B+\beta(x)<\frac{B}{2}<0$.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\cdot[B\alpha(x)-A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x)-A\beta(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.故取 $\varepsilon=\frac{|B|}{2}$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|\beta(x)-0|<\frac{|B|}{2}$.

因此, $B-\frac{|B|}{2}<B+\beta(x)<B+\frac{|B|}{2}$.若 $B>0$, 则 $0<\frac{B}{2}<B+\beta(x)<\frac{3B}{2}$;若 $B<0$, 则 $\frac{3B}{2}<B+\beta(x)<\frac{B}{2}<0$.因此 $\frac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是有界函数.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)} - \frac{A}{B} = \frac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x) - A\beta(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.故取 $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|\beta(x) - 0| < \frac{|B|}{2}$.

因此, $B - \frac{|B|}{2} < B + \beta(x) < B + \frac{|B|}{2}$.若 $B > 0$, 则 $0 < \frac{B}{2} < B + \beta(x) < \frac{3B}{2}$;若 $B < 0$, 则 $\frac{3B}{2} < B + \beta(x) < \frac{B}{2} < 0$.因此 $\frac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是有界函数.

由无穷小的性质, 知 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))} \cdot [B\alpha(x) - A\beta(x)]$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

Proof.

(3)

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta(x))}\cdot[B\alpha(x)-A\beta(x)]$$

首先 $B\alpha(x)-A\beta(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.其次, 我们证明 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是 x_0 的某个去心邻域内的有界函数.

由条件 $B\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.故取 $\varepsilon=\frac{|B|}{2}$, $\exists\delta>0$, s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|\beta(x)-0|<\frac{|B|}{2}$.

因此, $B-\frac{|B|}{2}<B+\beta(x)<B+\frac{|B|}{2}$.若 $B>0$, 则 $0<\frac{B}{2}<B+\beta(x)<\frac{3B}{2}$;若 $B<0$, 则 $\frac{3B}{2}<B+\beta(x)<\frac{B}{2}<0$.因此 $\frac{1}{B(B+\beta(x))}$ 是有界函数.

由无穷小的性质, 知 $\dfrac{1}{B(B+\beta(x))}\cdot[B\alpha(x)-A\beta(x)]$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小.因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$. $\square$

推论1

推论

若 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 存在, $C \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, 则

(1) $\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x)$;

(2) $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n$.

例子

前面已证$\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} \log_a x = 0$.

例子

前面已证$\lim_{x\to 0} a^x = 1$, $\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$.应用极限的运算法则以及此推论, 可证

例

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 则有 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

例子

前面已证 $\lim_{x\to 0} a^x = 1$，$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$.应用极限的运算法则以及此推论，可证

例

设 $a > 0$ 且 $a \neq 1$，则有 $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$，$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Proof.

以第二个为例(这里 $x_0 > 0$).

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \log_a x &= \lim_{x\to x_0} \log_a\left(\frac{x}{x_0}\cdot x_0\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\log_a \frac{x}{x_0} + \log_a x_0\right)\\
&= \lim_{x\to x_0} \log_a \frac{x}{x_0} + \lim_{x\to x_0} \log_a x_0\\
&= 0 + \log_a x_0\\
&= \log_a x_0.
\end{aligned}
$$

$\square$

推论2

推论

设 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式, 则 *(1)* $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, 这里 $Q(x_0) \neq 0$.

推论3

推论

若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, 且 $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

推论

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, $A \in \mathbb{R}$, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Proof.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \cdot A = 0.$$

$\square$

有理分式在无穷远处的极限

推论

设 $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$,
$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ 是两个实系数多项式, 次数分别是 m 次和 n 次.

推论

设 $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$,
$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ 是两个实系数多项式, 次数分别是 m 次和 n 次.即 $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, 且 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

推论

设 $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$,
$Q_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 是两个实系数多项式, 次数分别是 m 次和 n 次.即 $a_i,b_j\in\mathbb{R}$, 且 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

有理分式在无穷远处的极限

推论

设 $P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$,
$Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ 是两个实系数多项式, 次数分别是 m 次和 n 次.即 $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, 且 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ \infty, & m > n. \end{cases}$$

Proof.

略. □

数列极限的四则运算法则

数列极限的四则运算法则

数列是定义在正整数集上的函数，因此其极限也有所谓的四则运算法则.

数列极限的四则运算法则

数列是定义在正整数集上的函数, 因此其极限也有所谓的四则运算法则.

定理

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在, 则

数列极限的四则运算法则

数列是定义在正整数集上的函数, 因此其极限也有所谓的四则运算法则.

定理

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在, 则

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, (这里 $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.)

约定

约定

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 指 $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

约定

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 指 $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

$(-\infty, \infty)$ 即 $(-\infty, +\infty)$.

约定

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 指 $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

$(-\infty,\infty)$ 即 $(-\infty,+\infty)$.

以后当写 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 时, 就表示极限存在, 即 $A\in\mathbb{R}$.

约定

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 指 $\lim\limits_{n\to+\infty}$.

$(-\infty,\infty)$ 即 $(-\infty,+\infty)$.

以后当写 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 时, 就表示极限存在, 即 $A \in \mathbb{R}$.

$|x|$ 充分大, 指存在很大的数 $M > 0$, 使得 $|x| > M$.

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

(2) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A>B$.

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

(2) 设 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$, $\lim_{x \to \infty} g(x) = B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A > B$.取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta_0)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

定理

(1) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

(2) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A>B$.取 $0<\varepsilon<\frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1>0$, $(\delta_1<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2>0$, $(\delta_2<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, $|g(x)-B|<\varepsilon$;

定理

(1) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

(2) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A > B$.取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta_0)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2 > 0$, $(\delta_2 < \delta_0)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则 $A \leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A > B$.取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1 > 0$, $(\delta_1 < \delta_0)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_1)$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2 > 0$, $(\delta_2 < \delta_0)$ s.t., 当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_2)$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 与 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立.

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A>B$.取 $0<\varepsilon<\frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1>0$, $(\delta_1<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2>0$, $(\delta_2<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, $|g(x)-B|<\varepsilon$;

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ 与 $|g(x)-B|<\varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x)<B+\varepsilon<A-\varepsilon<f(x),$$

函数极限的保序性

定理

(1) 设 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

(2) 设 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A>B$.取 $0<\varepsilon<\frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1>0$, $(\delta_1<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2>0$, $(\delta_2<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, $|g(x)-B|<\varepsilon$;

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ 与 $|g(x)-B|<\varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x)<B+\varepsilon<A-\varepsilon<f(x),$$

这与 $f(x)\leqslant g(x), \forall x\in \mathring{U}(x,\delta_0)$ 矛盾.

定理

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且在点 x_0 的某个去心 δ_0-邻域内, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$, 且当 $|x|$ 充分大时, 有 $f(x)\leqslant g(x)$, 则 $A\leqslant B$.

Proof.

(1) (反证法) 假设 $A>B$.取 $0<\varepsilon<\frac{A-B}{2}$, 则存在 $\delta_1>0$, $(\delta_1<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$;对于此 ε, 存在 $\delta_2>0$, $(\delta_2<\delta_0)$ s.t., 当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时, $|g(x)-B|<\varepsilon$;

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|f(x)-A|<\varepsilon$ 与 $|g(x)-B|<\varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x)<B+\varepsilon<A-\varepsilon<f(x),$$

这与 $f(x)\leqslant g(x)$, $\forall x\in \mathring{U}(x,\delta_0)$ 矛盾.故 $A\leqslant B$. $\square$

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 M_0>0, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$,

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$,则当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 与 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立.

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$,则当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 与 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

函数极限的保序性

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$,则当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 与 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

这与 $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (-\infty, M_0) \cup (M_0, \infty)$ 矛盾.

函数极限的保序性

Proof.

(2) (反证法) 假设 $A > B$.且设存在足够大的数 $M_0>0$, 当 $|x| > M_0$ 时, $f(x) \leqslant g(x)$.

取 $0 < \varepsilon < \frac{A-B}{2}$, 则存在 $M_1 > 0$, $(M_1 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_1$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$;

对于此 ε, 存在 $M_2 > 0$, $(M_2 > M_0)$ s.t., 当 $|x| > M_2$ 时, $|g(x) - B| < \varepsilon$;

令 $M = \max\{M_1, M_2\}$,则当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - A| < \varepsilon$ 与 $|g(x) - B| < \varepsilon$ 同时成立.从而

$$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

这与 $f(x) \leqslant g(x), \forall x \in (-\infty, M_0) \cup (M_0, \infty)$ 矛盾.故 $A \leqslant B$. □

证法2

Proof.

(1) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$, 则 $h(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$.

证法2

Proof.

(1) 令 $h(x) = g(x) - f(x)$, 则 $h(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$.

又 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 故由极限的四则运算法则,

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = B - A.$$

证法2

Proof.

(1) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$, 则 $h(x)\geqslant 0$, $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$.

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 故由极限的四则运算法则,

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}(g(x)-f(x))=\lim_{x\to x_0} g(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)=B-A.$$

又由极限的保号性, 知 $B-A\geqslant 0$, 即 $A\leqslant B$. □

证法2

Proof.

(1) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$, 则 $h(x)\geqslant 0,\ \forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$.

又 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 故由极限的四则运算法则,

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}(g(x)-f(x))=\lim_{x\to x_0} g(x)-\lim_{x\to x_0} f(x)=B-A.$$

又由极限的保号性, 知 $B-A\geqslant 0$, 即 $A\leqslant B$. □

(2) 的证明是类似的.

复合函数的极限运算法则

定理

设 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 A, $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 且存在 x_0 的一个空心开邻域, 在此开邻域内 $g(x) \neq y_0$, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 A

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$ 知, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(y) - A| < \varepsilon.$$

定理

设 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 A, $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 且存在 x_0 的一个空心开邻域, 在此开邻域内 $g(x) \neq y_0$, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 A

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$ 知, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(y) - A| < \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, 对这个 δ, $\exists \eta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有

$$0 < |g(x) - y_0| < \delta,$$

定理

设 $f(y)$ 在 y_0 处的极限为 A, $g(x)$ 在 x_0 处的极限为 y_0, 且存在 x_0 的一个空心开邻域, 在此开邻域内 $g(x) \neq y_0$, 则复合函数 $f(g(x))$ 在 x_0 处的极限为 A

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$ 知, $\exists \delta > 0$, s.t., 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(y) - A| < \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, 对这个 δ, $\exists \eta > 0$, s.t., 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有

$$0 < |g(x) - y_0| < \delta,$$

此时有 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$. 此即证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$. □

注意

定理中的条件 $g(x) \neq y_0$ 一般不能去掉, 下面的函数就是例子:

注意

定理中的条件 $g(x) \neq y_0$ 一般不能去掉, 下面的函数就是例子:令

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

以及 $g(x) \equiv 0$, 则 $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$, 但 $f(g(x)) = 0$.

注意

定理中的条件 $g(x) \neq y_0$ 一般不能去掉, 下面的函数就是例子:令

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

以及 $g(x) \equiv 0$, 则 $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$, 但 $f(g(x)) = 0$.

不过, 当 $f(y_0) = A$ 时这个条件是可以去掉的. (为什么?)

命题 (复合运算的极限运算法则)

设 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = A$, $f(y_0) = A$. 且设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

命题 (复合运算的极限运算法则)

设 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, $f(y_0)=A$. 且设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.

Proof.

对于函数 $f(y)$, 根据条件, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. 当 $|y-y_0|<\delta$ 时, 有 $|f(y)-A|<\varepsilon$.

命题 (复合运算的极限运算法则)

设 $\lim_{y\to y_0} f(y) = A$, $f(y_0) = A$. 且设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Proof.

对于函数 $f(y)$, 根据条件, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $|y - y_0| < \delta$ 时, 有 $|f(y) - A| < \varepsilon$.

而 $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, 故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有 $|g(x) - y_0| < \delta$.

命题 (复合运算的极限运算法则)

设 $\lim_{y\to y_0} f(y) = A$, $f(y_0) = A$. 且设 $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$. 则 $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Proof.

对于函数 $f(y)$, 根据条件, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $|y - y_0| < \delta$ 时, 有 $|f(y) - A| < \varepsilon$.

而 $\lim_{x\to x_0} g(x) = y_0$, 故对上面的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有 $|g(x) - y_0| < \delta$.

于是, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. 当 $0 < |x - x_0| < \eta$ 时, 有 $|g(x) - y_0| < \delta$, 满足 $f(y)$ 的条件, 从而 $|f(g(x)) - A| < \varepsilon$.

$\square$

一些例子

例

研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

例

研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 作变量替换 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\frac{1}{y})^y.$$

例

研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. 作变量替换 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\frac{1}{y})^y.$$

当 $x \to 0$ 时, $y \to \infty$. 根据复合函数的求极限法则知

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y = e.$$

∎

例

研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. 作变量替换 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{y})^y.$$

当 $x\to 0$ 时, $y\to\infty$. 根据复合函数的求极限法则知

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e.$$

∎

注

(1) 注意**变量替换本质上是构造复合函数**. $(1+\frac{1}{y})^y$ 可以看成 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 与 $x=g(y)=\frac{1}{y}$ 的复合.

例

研究函数 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. 作变量替换 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=(1+\frac{1}{y})^y.$$

当 $x\to 0$ 时, $y\to\infty$. 根据复合函数的求极限法则知

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e.$$

∎

注

(1) 注意**变量替换本质上是构造复合函数**. $(1+\frac{1}{y})^y$ 可以看成 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 与 $x=g(y)=\frac{1}{y}$ 的复合.

(2) 以后应用变量替换时, 不再说明这是应用了复合函数的极限法则.

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\dfrac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\dfrac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 1$, 故极限为 0.

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\dfrac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 1$, 故极限为 0.下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \to 0$ 时, $y \to 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \to 1$ $(x \to 0)$.)

例

设 $a>0$, 研究函数 $\dfrac{a^x-1}{x}$ 在 $x_0=0$ 处的极限.

解. $a=1$ 时 $a^x-1\equiv 1$, 故极限为 0.下设 $a\neq 1$. 作变量替换 $y=a^x-1$, 则 $x\to 0$ 时, $y\to 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x\to 1$ $(x\to 0)$.)于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]}\\&=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.\end{aligned}$$

∎

例

设 $a > 0$, 研究函数 $\dfrac{a^x - 1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 处的极限.

解. $a = 1$ 时 $a^x - 1 \equiv 1$, 故极限为 0.下设 $a \neq 1$. 作变量替换 $y = a^x - 1$, 则 $x \to 0$ 时, $y \to 0$. (这里利用了已证明的结论 $a^x \to 1$ $(x \to 0)$.)于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

∎

注

倒数第二个等号用到了复合运算的极限法则(命题4.2).

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t) = \lim\limits_{t\to e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t) = \lim\limits_{t\to e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

$\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.

注

事实上, 记 $f(t)=\log_a t$, $g(y)=(1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t)=\lim\limits_{t\to e}\log_a t=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

$\lim\limits_{y\to 0} g(y)=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y\to 0}\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]=\frac{1}{\ln a}.$$

注

事实上, 记 $f(t)=\log_a t$, $g(y)=(1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t)=\lim\limits_{t\to e}\log_a t=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e)=\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

$\lim\limits_{y\to 0} g(y)=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$.因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y\to 0}\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]=\frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y\to 0}\log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}]=\log_a[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t) = \lim\limits_{t\to e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

$\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y\to 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y\to 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}] = \log_a[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的.但这里其实用到了复合函数极限运算的法则.

注

事实上, 记 $f(t) = \log_a t$, $g(y) = (1+y)^{\frac{1}{y}}$.

$\lim\limits_{t\to e} f(t) = \lim\limits_{t\to e} \log_a t = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$, 且 $f(e) = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$.

$\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$.因此由复合运算的法则, 得

$$\lim_{y\to 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}] = \frac{1}{\ln a}.$$

也就是我们在写下面的式子

$$\lim_{y\to 0} \log_a[(1+y)^{\frac{1}{y}}] = \log_a[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]$$

时, 不自觉地认为这是显然成立的.但这里其实用到了复合函数极限运算的法则.后面将说明这实际上也是函数 $\log_a x$ 连续性的表现.