闭区间上连续函数的性质

徐海峰

October 11, 2023

数学科学学院，扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

函数的性质密切依赖于实数系的构造.

函数的性质密切依赖于实数系的构造.

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反映.

函数的性质密切依赖于实数系的构造.

连续函数的性质实际上是实数系的基本性质的某种反映.

这里的定理只需记住结论, 证明不要求掌握.

最值定理和介值定理

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

零值定理, Bolzano 定理

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

定理 (介值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

定义 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.t., 当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

提高

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

Proof.

（反证法）假设 f 在 $[a, b]$ 上无界, 即存在点列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, s.t. $|f(x_n)| \geqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

Proof.

（反证法）假设 f 在 $[a, b]$ 上无界, 即存在点列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, s.t. $|f(x_n)| \geqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

由于 $\{x_n\}$ 是有界数列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t. $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$ $(k \to \infty)$.

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

Proof.

（反证法）假设 f 在 $[a, b]$ 上无界, 即存在点列 $\{x_n\} \subset [a, b]$, s.t. $|f(x_n)| \geqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

由于 $\{x_n\}$ 是有界数列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t. $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$ $(k \to \infty)$.

由于 f 在 x_0 连续, 故 $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$.

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

Proof.

（反证法）假设 f 在 $[a,b]$ 上无界, 即存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, s.t. $|f(x_n)| \geqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

由于 $\{x_n\}$ 是有界数列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t. $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ $(k \to \infty)$.

由于 f 在 x_0 连续, 故 $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$.故 $f(x_{n_k})$ 有界, 这与 $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k$ 矛盾. □

定理 (有界性定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

Proof.

（反证法）假设 f 在 $[a,b]$ 上无界, 即存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, s.t. $|f(x_n)| \geqslant n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

由于 $\{x_n\}$ 是有界数列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ s.t. $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ $(k \to \infty)$.

由于 f 在 x_0 连续, 故 $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$.故 $f(x_{n_k})$ 有界, 这与 $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k$ 矛盾. □

另一种证法利用 $[a,b]$ 的紧性构造 f 的上界. 详见梅加强编著《数学分析》.

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

Proof.

根据有界性定理, f 有界. 因此 $f([a,b])$ 有上确界和下确界.

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

Proof.

根据有界性定理, f 有界. 因此 $f([a,b])$ 有上确界和下确界.记上确界为 M, 根据定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, s.t.

$$M - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

Proof.

根据有界性定理, f 有界. 因此 $f([a,b])$ 有上确界和下确界.记上确界为 M, 根据定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, s.t.

$$M - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

根据夹逼原理, $f(x_n) \to M\ (n \to \infty)$.

定理 (最值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必取到最大值和最小值, 即存在 $x_*, x^* \in [a,b]$, 使得,

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*), \quad \forall x \in [a,b].$$

Proof.

根据有界性定理, f 有界. 因此 $f([a,b])$ 有上确界和下确界.记上确界为 M, 根据定义, 存在点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, s.t.

$$M - \frac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M.$$

根据夹逼原理, $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$.因为 $\{x_n\}$ 有界数列, 故存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛到点 $x^* \in [a,b]$. $\square$

续

Proof.

又因 f 在 x^* 连续, 故 $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x^*)$.

续

Proof.

又因 f 在 x^* 连续, 故 $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x^*)$.因此 $f(x^*) = M$. 即 f 在 $[a,b]$ 上能取到最大值 M.

Proof.

又因 f 在 x^* 连续, 故 $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x^*)$.因此 $f(x^*) = M$. 即 f 在 $[a, b]$ 上能取到最大值 M.

同理可证 f 在 $[a, b]$ 上能取到最小值. 或者考虑 $-f$ 的最大值. $\square$

Proof.

又因 f 在 x^* 连续, 故 $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x^*)$.因此 $f(x^*) = M$. 即 f 在 $[a, b]$ 上能取到最大值 M.

同理可证 f 在 $[a, b]$ 上能取到最小值. 或者考虑 $-f$ 的最大值. □

第二种证法参见梅加强编著《数学分析》.

零值定理, Bolzano 定理

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

Proof.

不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

Proof.

不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.令

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\},$$

零值定理, Bolzano 定理

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

Proof.

不妨设 $f(a)<0$, $f(b)>0$.令

$$A=\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\},$$

则 $a\in A$. A 显然有上界, 记 ξ 为 A 的上确界, 由 f 的连续性, $\xi>a$.

零值定理, Bolzano 定理

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

Proof.

不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.令

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\},$$

则 $a \in A$. A 显然有上界, 记 ξ 为 A 的上确界, 由 f 的连续性, $\xi > a$.(f 在 a 处右连续, 而 $f(a) < 0$, 故由极限的保号性, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \delta)$ 时, $f(x) < 0$. 因此 $\xi > a$.)

零值定理, Bolzano 定理

定理 (零值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

Proof.

不妨设 $f(a)<0$, $f(b)>0$.令

$$A=\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\},$$

则 $a\in A$. A 显然有上界, 记 ξ 为 A 的上确界, 由 f 的连续性, $\xi>a$.(f 在 a 处右连续, 而 $f(a)<0$, 故由极限的保号性, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta)$ 时, $f(x)<0$. 因此 $\xi>a$.)由确界的定义, 存在 $x_n\in[a,b]$, 使得 $f(x_n)<0$, $x_n\to\xi$. $\square$

Proof.

因此

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

Proof.

因此

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

特别地, $\xi < b$.

续

Proof.

因此

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

特别地, $\xi < b$.由 A 的定义知 f 在 $(\xi, b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi) \geqslant 0$, 这说明 $f(\xi) = 0$.

Proof.

因此
$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$
特别地, $\xi < b$.由 A 的定义知 f 在 $(\xi, b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi) \geqslant 0$, 这说明 $f(\xi) = 0$.显然 $\xi \in (a, b)$. $\square$

Proof.

因此

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\leqslant 0,$$

特别地, $\xi<b$.由 A 的定义知 f 在 $(\xi,b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi)\geqslant 0$, 这说明 $f(\xi)=0$.显然 $\xi\in(a,b)$. □

注

如果条件改为 $f(a)f(b)\leqslant 0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f(\xi)=0$.

续

Proof.

因此

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

特别地, $\xi < b$.由 A 的定义知 f 在 $(\xi, b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi) \geqslant 0$, 这说明 $f(\xi) = 0$.显然 $\xi \in (a, b)$. □

注

如果条件改为 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.事实上, 若 $f(a)f(b) = 0$, 则 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$, 从而取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$ 即可;

Proof.

因此

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0,$$

特别地, $\xi < b$.由 A 的定义知 f 在 $(\xi, b]$ 上非负, 由 f 的连续性知 $f(\xi) \geqslant 0$, 这说明 $f(\xi) = 0$.显然 $\xi \in (a, b)$. □

注

如果条件改为 $f(a)f(b) \leqslant 0$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = 0$.事实上, 若 $f(a)f(b) = 0$, 则 $f(a) = 0$ 或 $f(b) = 0$, 从而取 $\xi = a$ 或 $\xi = b$ 即可;当 $f(a)f(b) < 0$ 时用零值定理的结论即可.

定理 (介值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

定理 (介值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

Proof.

因 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则 $(f(a) - \mu)(f(b) - \mu) < 0$.

定理 (介值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

Proof.

因 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则 $(f(a) - \mu)(f(b) - \mu) < 0$.

由零值定理, 连续函数 $f(x) - \mu$ 在 (a, b) 内存在零点 ξ,

定理 (介值定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

Proof.

因 μ 是严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数, 则 $(f(a) - \mu)(f(b) - \mu) < 0$.

由零值定理, 连续函数 $f(x) - \mu$ 在 (a, b) 内存在零点 ξ,即 $f(\xi) = \mu$. $\square$

连续函数在有限闭区间上可取到最小值和最大值

推论

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f([a,b]) = [m, M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

连续函数在有限闭区间上可取到最小值和最大值

推论

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f([a, b]) = [m, M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理, f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.

推论

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f([a,b]) = [m, M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理, f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.即存在 x_*, x^*, 使得 $f(x_*) = m$, $f(x^*) = M$.

连续函数在有限闭区间上可取到最小值和最大值

推论

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f([a,b]) = [m,M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理, f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.即存在 x_*, x^*, 使得 $f(x_*) = m$, $f(x^*) = M$.并且显然有 $f([a,b]) \subset [m,M]$.

推论

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $f([a,b])=[m,M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理, f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.即存在 x_*, x^*, 使得 $f(x_*)=m$, $f(x^*)=M$.并且显然有 $f([a,b])\subset[m,M]$.

若 f 是 $[a,b]$ 上的常值函数, 即 $m=M$, 则 $f([a,b])=[m,M]$ 成立.

推论

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $f([a, b]) = [m, M]$, 其中 m, M 分别是 f 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理, f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.即存在 x_*, x^*, 使得 $f(x_*) = m$, $f(x^*) = M$.并且显然有 $f([a, b]) \subset [m, M]$.

若 f 是 $[a, b]$ 上的常值函数, 即 $m = M$, 则 $f([a, b]) = [m, M]$ 成立.

若 f 不是常值函数, 即 $m < M$.

连续函数在有限闭区间上可取到最小值和最大值

推论

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f([a,b]) = [m,M]$，其中 m，M 分别是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

Proof.

根据最值定理，f 的最小值 m 和最大值 M 可被取到.即存在 x_*, x^*，使得 $f(x_*) = m$，$f(x^*) = M$.并且显然有 $f([a,b]) \subset [m,M]$.

若 f 是 $[a,b]$ 上的常值函数，即 $m = M$，则 $f([a,b]) = [m,M]$ 成立.

若 f 不是常值函数，即 $m < M$.

由介值定理，介于 m 和 M 之间的数都能被取到，因此 $[m,M] \subset f([a,b])$. 这说明 $f([a,b]) = [m,M]$. □

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(I)$ 也是区间(可退化为一点).

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(I)$ 也是区间(可退化为一点).

Proof.

若 f 是区间 I 上的常值函数, 则 $f(I)$ 退化为一点.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(I)$ 也是区间(可退化为一点).

Proof.

若 f 是区间 I 上的常值函数, 则 $f(I)$ 退化为一点.

否则, 任取 $y_1 < y_2 \in f(I)$, 设 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, 在以 x_1, x_2 为端点的闭区间上应用介值定理, 知 $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(I)$ 也是区间(可退化为一点).

Proof.

若 f 是区间 I 上的常值函数, 则 $f(I)$ 退化为一点.

否则, 任取 $y_1 < y_2 \in f(I)$, 设 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, 在以 x_1, x_2 为端点的闭区间上应用介值定理, 知 $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

由 y_1, y_2 的任意性知 $f(I)$ 为一个区间. □

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

(1) 若 $f(x'') < f(x_1)$, 此时 $f(x') \leqslant f(x'') < f(x_1)$.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

(1) 若 $f(x'') < f(x_1)$, 此时 $f(x') \leqslant f(x'') < f(x_1)$.由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x']$, 使得 $f(\xi) = f(x'')$, 这与 f 可逆矛盾.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

(1) 若 $f(x'') < f(x_1)$, 此时 $f(x') \leqslant f(x'') < f(x_1)$.由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x']$, 使得 $f(\xi) = f(x'')$, 这与 f 可逆矛盾.

(2) 若 $f(x'') > f(x_1)$, 此时 $f(x_2) < f(x_1) < f(x'')$,

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

(1) 若 $f(x'') < f(x_1)$, 此时 $f(x') \leqslant f(x'') < f(x_1)$.由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x']$, 使得 $f(\xi) = f(x'')$, 这与 f 可逆矛盾.

(2) 若 $f(x'') > f(x_1)$, 此时 $f(x_2) < f(x_1) < f(x'')$,由介值定理, 存在 $\xi \in [x'', x_2]$, 使得 $f(\xi) = f(x_1)$, 这与 f 可逆矛盾.

推论

设 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数, 则 $f(x)$ 可逆当且仅当 $f(x)$ 是严格单调函数.

Proof.

只需证必要性.设 $x_1 < x_2 \in I$, 由于 f 可逆, 故 $f(x_1) \neq f(x_2)$.若 $f(x_1) > f(x_2)$, 我们将推出 f 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减. 由 x_1, x_2 的任意性, 知 f 是 I 上的严格单调递减函数.

证明使用反证法. 设 $x' < x'' \in [x_1, x_2]$, $f(x') \leqslant f(x'')$.

(1) 若 $f(x'') < f(x_1)$, 此时 $f(x') \leqslant f(x'') < f(x_1)$.由介值定理, 存在 $\xi \in [x_1, x']$, 使得 $f(\xi) = f(x'')$, 这与 f 可逆矛盾.

(2) 若 $f(x'') > f(x_1)$, 此时 $f(x_2) < f(x_1) < f(x'')$,由介值定理, 存在 $\xi \in [x'', x_2]$, 使得 $f(\xi) = f(x_1)$, 这与 f 可逆矛盾.

若 $f(x_1) < f(x_2)$, 证明是类似的. 参见梅加强编著《数学分析》. $\square$

定义 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.t., 当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**一致连续**.

定义 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.t., 当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**一致连续**.

注

- 显然, 一致连续函数一定是连续函数.

定义 (一致连续)

设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 上, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, s.t., 当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 上**一致连续**.

注

- 显然, 一致连续函数一定是连续函数.
- 一致连续性区别于连续性的地方在于当使用 $\varepsilon - \delta$ 语言描述一致连续性时, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在对所有连续点统一的 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. 也即 δ 与连续点的位置无关, 至多与 ε 有关系; 而(在某一点 x_0 的)连续性的描述中, δ 通常与 x_0 和 ε 相关. 例如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, 在 $x_0 \neq 0$ 处连续. 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \min\{\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2}x_0^2\varepsilon\}$.

使用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出**非一致连续**的定义.

使用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出**非一致连续**的定义.

我们要将定义**一致连续**中的 $\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$.

使用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出**非一致连续**的定义.

我们要将定义**一致连续**中的 $\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$.

由于非连续函数一定不是一致连续的, 故考虑 $[a,b]$ 上的连续函数.

使用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出**非一致连续**的定义.

我们要将定义**一致连续**中的 $\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$.

由于非连续函数一定不是一致连续的, 故考虑 $[a,b]$ 上的连续函数.

定义 (非一致连续)

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 若存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $\delta>0$, $\exists x^1,x^2\in[a,b]$, 且 $|x^1-x^2|<\delta$, 则有

$$|f(x^1)-f(x^2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

使用 $\varepsilon-\delta$ 语言写出**非一致连续**的定义.

我们要将定义**一致连续**中的 $\forall$ 改为 $\exists$, $\exists$ 改为 $\forall$.

由于非连续函数一定不是一致连续的, 故考虑 $[a, b]$ 上的连续函数.

定义 (非一致连续)

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 若存在 $\varepsilon_0>0$, 对任意 $\delta>0$, $\exists x^1, x^2 \in [a, b]$, 且 $|x^1-x^2|<\delta$, 则有

$$|f(x^1)-f(x^2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

由于 $\delta>0$ 可以任取, 因此可以改写为

定义

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数. 若存在 $\varepsilon_0>0$, 以及点列 $\{x_n^1\}$ 和 $\{x_n^2\}$, 满足 $x_n^1-x_n^2 \to 0$ $(n\to\infty)$, 则有

$$|f(x^1)-f(x^2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

Proof.

(反证法) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

Proof.

(反证法) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.若 f 不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及点列 $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [a,b]$, 使得 $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_n.$$

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

Proof.

(反证法) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.若 f 不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及点列 $\{a_n\},\{b_n\} \subset [a,b]$, 使得 $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_n.$$

因为 $\{b_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{b_{n_i}\}$, 设 $b_{n_i} \to x_0 \in [a,b]$.

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

Proof.

(反证法) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.若 f 不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及点列 $\{a_n\},\{b_n\} \subset [a,b]$, 使得 $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_n.$$

因为 $\{b_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{b_{n_i}\}$, 设 $b_{n_i} \to x_0 \in [a,b]$.此时,

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \;\to\; 0 + x_0 = x_0 \quad (i \to \infty).$$

定理 (Cantor)

闭区间上的连续函数是一致连续的.

Proof.

(反证法) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数.若 f 不是一致连续的, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 以及点列 $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [a, b]$, 使得 $a_n - b_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 且

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geqslant \varepsilon_n.$$

因为 $\{b_n\}$ 为有界点列, 故存在收敛子列 $\{b_{n_i}\}$, 设 $b_{n_i} \to x_0 \in [a, b]$.此时,

$$a_{n_i} = (a_{n_i} - b_{n_i}) + b_{n_i} \ \to \ 0 + x_0 = x_0 \quad (i \to \infty).$$

因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故

$$\varepsilon_0 \leqslant |f(a_{n_i}) - f(b_{n_i})| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0 \quad (i \to \infty),$$

这就导出了矛盾. (另一证法参见梅加强的《数学分析》.) □