高阶导数

徐海峰

October 23, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

---

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

[2] 蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

高阶导数

定义

如果 f 在区间 I 的每一点都可导, 则可以定义新的函数

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

称为 f 在 I 上的**导函数**.

定义 (高阶导数)

设 f 在 x_0 附近可导, 如果导函数 f' 在 x_0 处仍可导, 则称 f 在 x_0 处 2 阶可导. 记

$$f''(x_0) = (f')'(x_0),$$

称为 f 在 x_0 处的 2 阶导数. 一般地, 如果 f 在 x_0 附近 n $(n \geqslant 1)$ 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 在 x_0 处可导, 则称 f 在 x_0 处 $n+1$ 阶可导, 记

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0),$$

称为 f 的 $n+1$ 阶导数.

记号

$f^{(n)}$ 表示 f 的 n 阶导数, 这里 n 为正整数.

记号

$f^{(n)}$ 表示 f 的 n 阶导数, 这里 n 为正整数.约定 $f^{(0)} = f$, 0阶导数即不求导.

记号

$f^{(n)}$ 表示 f 的 n 阶导数, 这里 n 为正整数.约定 $f^{(0)} = f$, 0阶导数即不求导.

当 $n = 1, 2, 3$ 时, 也可以用 f', f'', f''' 分别表示 f 的 1阶、2阶、3阶导数.

记号

$f^{(n)}$ 表示 f 的 n 阶导数, 这里 n 为正整数.约定 $f^{(0)} = f$, 0阶导数即不求导.

当 $n = 1, 2, 3$ 时, 也可以用 f', f'', f''' 分别表示 f 的 1阶、2阶、3阶导数.

有时也用下面的符号表示高阶导数:

$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \quad f''' = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}, \quad f^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}, \quad \ldots$$

光滑函数

定义

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n **阶可导**;

光滑函数

定义

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n **阶可导**;如果 f 可导, 且导函数 f' 连续, 则称 f **1 阶连续可导**, 记为 $f \in C^1(I)$;

光滑函数

定义

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n **阶可导**;如果 f 可导, 且导函数 f' 连续, 则称 f **1 阶连续可导**, 记为 $f \in C^1(I)$;一般地, 如果 f 在 I 中 n 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 连续, 则称 f n **阶连续可导**, 记为 $f \in C^n(I)$.

光滑函数

定义

如果 f 在区间 I 的每一点处均 n 阶可导, 则称 f 在 I 中 n **阶可导**;如果 f 可导, 且导函数 f' 连续, 则称 f **1 阶连续可导**, 记为 $f \in C^1(I)$;一般地, 如果 f 在 I 中 n 阶可导, 且 n 阶导函数 $f^{(n)}$ 连续, 则称 f n **阶连续可导**, 记为 $f \in C^n(I)$.如果 f 在 I 中存在任意阶导数, 则称 f 是**光滑的**, 记为 $f \in C^\infty(I)$.

例

可微函数的导函数不一定连续.

例

可微函数的导函数不一定连续.

解. 考虑下面的函数,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

例

可微函数的导函数不一定连续.

解. 考虑下面的函数,

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,1], \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

我们先计算 f 在 $x=0$ 处的导数:

$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{3}{2}}\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0,$$

例

可微函数的导函数不一定连续.

解. 考虑下面的函数,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们先计算 f 在 $x=0$ 处的导数:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

当 $x > 0$ 时, 由复合函数求导, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

例

可微函数的导函数不一定连续.

解. 考虑下面的函数,

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

我们先计算 f 在 $x=0$ 处的导数:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0,$$

当 $x > 0$ 时, 由复合函数求导, 有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

考察 f' 在 $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ 处的取值知 $f'(x_n) \to -\infty$, 因此 f' 不连续. ∎

是 C^k 但非 C^{k+1} 的函数例子

例

设 $k=1,2,\ldots$, 则函数

$$f(x)=\begin{cases} x^{2k+1}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

是 C^k 函数, 但不是 C^{k+1} 的.

是 C^k 但非 C^{k+1} 的函数例子

例

设 $k = 1, 2, \dots$, 则函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2k+1} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

是 C^k 函数, 但不是 C^{k+1} 的.

解. 同上例一样, 先计算 $f'(0) = 0$,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2k+1} \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{2k} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

∎

续

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = (2k+1)x^{2k}\sin\frac{1}{x} - x^{2k-1}\cos\frac{1}{x}.$$

续

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = (2k+1)x^{2k} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-1} \cos \frac{1}{x}.$$

于是

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(2k+1)x^{2k} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-1} \cos \frac{1}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} [(2k+1)x^{2k-1} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-2} \cos \frac{1}{x}] \end{aligned}$$

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = (2k+1)x^{2k} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-1} \cos \frac{1}{x}.$$

于是

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{(2k+1)x^{2k} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-1} \cos \frac{1}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} [(2k+1)x^{2k-1} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-2} \cos \frac{1}{x}] \end{aligned}$$

若 $k = 1$, 则 $f''(0)$ 不存在. 此时 $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, 即 f' 是连续函数. $f' \in C^1$, 但 $f' \notin C^2$. ∎

续

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[(2k+1)x^{2k}\sin\frac{1}{x} - x^{2k-1}\cos\frac{1}{x}\right]' \\
&= \left(2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - (2k+1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x}\right) \\
&\quad - \left((2k-1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x} + x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}\right) \\
&= 2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - 4kx^{2k-2}\cos\frac{1}{x} - x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

续

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[(2k+1)x^{2k}\sin\frac{1}{x} - x^{2k-1}\cos\frac{1}{x}\right]' \\
&= \left(2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - (2k+1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x}\right) \\
&\quad - \left((2k-1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x} + x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}\right) \\
&= 2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - 4kx^{2k-2}\cos\frac{1}{x} - x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

因此, 若 $k=2$, 则 f'' 是连续函数, 即 $f \in C^2$, 且 $f''(0)=0$.

续

解. 当 $x \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[(2k+1)x^{2k}\sin\frac{1}{x} - x^{2k-1}\cos\frac{1}{x}\right]' \\
&= \left(2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - (2k+1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x}\right) \\
&\quad - \left((2k-1)x^{2k-2}\cos\frac{1}{x} + x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}\right) \\
&= 2k(2k+1)x^{2k-1}\sin\frac{1}{x} - 4kx^{2k-2}\cos\frac{1}{x} - x^{2k-3}\sin\frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

因此, 若 $k = 2$, 则 f'' 是连续函数, 即 $f \in C^2$, 且 $f''(0) = 0$.但是

$$
f'''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{20x^3\sin\frac{1}{x} - 8x^2\cos\frac{1}{x} - x\sin\frac{1}{x}}{x}
$$

不存在, 故 $f \notin C^3$. ∎

续

解. 继续求导, 可得 $f^{(k)}(0)=0$, 且当 $x\neq 0$ 时,

$$f^{(k)}(x)=x^2\phi(x)\pm x\sin\frac{1}{x}\quad\text{或}\quad x^2\phi(x)\pm x\cos\frac{1}{x},$$

其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 附近有界.

续

解. 继续求导, 可得 $f^{(k)}(0)=0$, 且当 $x\neq 0$ 时,

$$f^{(k)}(x)=x^2\phi(x)\pm x\sin\frac{1}{x}\quad\text{或}\quad x^2\phi(x)\pm x\cos\frac{1}{x},$$

其中 $\phi(x)$ 在 $x=0$ 附近有界.因此 $f^{(k)}$ 连续但在 $x=0$ 处不可导. ∎

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

Proof.

(1) 利用求导运算的线性性以及归纳法直接可得.

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

Proof.

(1) 利用求导运算的线性性以及归纳法直接可得.

(2) 对 n 用归纳法.

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数*.*

Proof.

(1) 利用求导运算的线性性以及归纳法直接可得.

(2) 对 n 用归纳法.当 $n=1$ 时, $(fg)'=f'g+fg'$.

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

Proof.

(1) 利用求导运算的线性性以及归纳法直接可得.

(2) 对 n 用归纳法.当 $n=1$ 时, $(fg)'=f'g+fg'$.

当 $n=2$ 时,

$$
\begin{aligned}
(fg)'' &= [(fg)']' = [f'g+fg']' = (f'g)'+(fg')' \\
&= (f''g+f'g')+(f'g'+fg'') = f''g+2f'g'+fg''.
\end{aligned}
$$

命题

设 f, g 均为 n 阶可导函数, 则

(1) $(\alpha f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}, \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(2) (Leibniz) $(fg)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, 其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数.

Proof.

(1) 利用求导运算的线性性以及归纳法直接可得.

(2) 对 n 用归纳法.当 $n=1$ 时, $(fg)'=f'g+fg'$.

当 $n=2$ 时,

$$\begin{aligned}(fg)''&=[(fg)']'=[f'g+fg']'=(f'g)'+(fg')'\\&=(f''g+f'g')+(f'g'+fg'')=f''g+2f'g'+fg''.\end{aligned}$$

因此, 可设公式对 $n=k$ 成立. □

Proof.

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} &= [(fg)^{(k)}]' = \sum_{l=0}^{k} C_k^l [f^{(k-l)} g^{(l)}]' \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_k^l [f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f^{(k-l)} g^{(l+1)}] \\
&= C_k^0 f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^{k} C_k^l f^{(k-l+1)} g^{(l)} + \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l f^{(k-l)} g^{(l+1)} + C_k^k f g^{(k+1)} \\
&= f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^{k} [C_k^l + C_k^{l-1}] f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f g^{(k+1)} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l f^{(k+1-l)} g^{(l)},
\end{aligned}
$$

Proof.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} &= [(fg)^{(k)}]' = \sum_{l=0}^{k} C_k^l [f^{(k-l)} g^{(l)}]' \\
&= \sum_{l=0}^{k} C_k^l [f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f^{(k-l)} g^{(l+1)}] \\
&= C_k^0 f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^{k} C_k^l f^{(k-l+1)} g^{(l)} + \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l f^{(k-l)} g^{(l+1)} + C_k^k f g^{(k+1)} \\
&= f^{(k+1)} g + \sum_{l=1}^{k} [C_k^l + C_k^{l-1}] f^{(k-l+1)} g^{(l)} + f g^{(k+1)} \\
&= \sum_{l=0}^{k+1} C_{k+1}^l f^{(k+1-l)} g^{(l)},
\end{aligned}$$

其中我们用到组合恒等式 $C_k^l + C_k^{l-1} = C_{k+1}^l$. □

多项式的高阶导数

例

设多项式 $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 次数为 n, 则

(1) $p_n^{(n)}(x) = n!a_n$, 从而 $p_n^{(k)}(x) = 0$, $\forall\ k > n$.

(2) $a_k = \dfrac{1}{k!}p_n^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

例

设多项式 $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 次数为 n, 则

(1) $p_n^{(n)}(x) = n! a_n$, 从而 $p_n^{(k)}(x) = 0, \forall\ k > n$.

(2) $a_k = \dfrac{1}{k!} p_n^{(k)}(0),\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Proof.

$$[p_n(x)]' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 3 a_3 x^2 + 2 a_2 x + a_1,$$

多项式的高阶导数

例

设多项式 $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 次数为 n, 则

(1) $p_n^{(n)}(x) = n!a_n$, 从而 $p_n^{(k)}(x) = 0, \ \forall\ k > n$.

(2) $a_k = \dfrac{1}{k!}p_n^{(k)}(0), \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Proof.

$$[p_n(x)]' = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1,$$

$$[p_n(x)]'' = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 3\cdot 2a_3 x + 2a_2$$

$\square$

Proof.

可设

$$[p_n(x)]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2a_{k+1}x + k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_k. \tag{*}$$

Proof.

可设

$$[p_n(x)]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2a_{k+1}x + k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_k. \tag{*}$$

于是,

$$\begin{aligned}[p_n(x)]^{(k+1)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1} \\ + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)(n-k-1)a_{n-1}x^{n-k-2} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_{k+1}.\end{aligned}$$

Proof.

可设

$$[p_n(x)]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2 a_{k+1}x + k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 a_k. \tag{*}$$

于是,

$$\begin{aligned}[p_n(x)]^{(k+1)} = n(n-1)&\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1} \\ &+ (n-1)(n-2)\cdots(n-k)(n-k-1)a_{n-1}x^{n-k-2} + \cdots \\ &+ (k+1)k\cdots 3\cdot 2\cdot 1 a_{k+1}.\end{aligned}$$

因此, 归纳假设中的公式(*)对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立.

Proof.

可设

$$[p_n(x)]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2a_{k+1}x + k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_k. \tag{*}$$

于是,

$$\begin{aligned}[p_n(x)]^{(k+1)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1} \\ + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)(n-k-1)a_{n-1}x^{n-k-2} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2\cdot 1a_{k+1}.\end{aligned}$$

因此, 归纳假设中的公式(*)对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立.特别地, 取 $k = n$ 得

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n.$$

Proof.

可设

$$[p_n(x)]^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \cdots \\ + (k+1)k\cdots 3\cdot 2 a_{k+1}x + k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 a_k. \tag{*}$$

于是,

$$\begin{aligned}[p_n(x)]^{(k+1)} = {} & n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)a_n x^{n-k-1} \\ & + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)(n-k-1)a_{n-1}x^{n-k-2} + \cdots \\ & + (k+1)k\cdots 3\cdot 2\cdot 1 a_{k+1}.\end{aligned}$$

因此, 归纳假设中的公式(*)对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 都成立.特别地, 取 $k = n$ 得

$$p_n^{(n)}(x) = n!a_n.$$

而令 $x = 0$ 就得到 (2). □

例子

例

求函数 $f(x) = a^x$ 的各阶导数.

例子

例

求函数 $f(x) = a^x$ 的各阶导数.

解.

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a, \quad f''(x) = (a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x (\ln a)^2, \quad \ldots$$

例子

例

求函数 $f(x) = a^x$ 的各阶导数.

解.

$$f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a, \quad f''(x) = (a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x (\ln a)^2, \quad \dots$$

应用归纳法, 可证明

$$f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

∎

例

求函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 的各阶导数.

例

求函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 的各阶导数.

解.

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \\
(\sin x)'' &= \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2) \\
(\sin x)''' &= \left(\sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2) = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3)
\end{aligned}
$$

例

求函数 $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ 的各阶导数.

解.

$$(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$
$$(\sin x)'' = \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)$$
$$(\sin x)''' = \left(\sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2) = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3)$$

于是可用归纳法证明

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

∎

解.

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}),$$
$$(\cos x)'' = \big(\cos(x + \frac{\pi}{2})\big)' = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)$$
$$(\cos x)''' = \big(\cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)\big)' = -\sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2) = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3)$$

解.

$$(\cos x)' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$(\cos x)'' = \big(\cos(x + \frac{\pi}{2})\big)' = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)$$

$$(\cos x)''' = \big(\cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2)\big)' = -\sin(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2) = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3)$$

于是可用归纳法证明

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2} \cdot n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

∎

例

设 f, g 均为 3 阶可导函数, 求复合函数 $f(g)$ 的 3 阶导数.

例

设 f, g 均为 3 阶可导函数, 求复合函数 $f(g)$ 的 3 阶导数.

解.

$$[f(g)]' = f'(g)g',$$
$$[f(g)]'' = [f'(g)g']' = [f'(g)]'g' + f'(g)g'' = f''(g)g'g' + f'(g)g'',$$

例

设 f, g 均为 3 阶可导函数, 求复合函数 $f(g)$ 的 3 阶导数.

解.

$$\begin{aligned}
[f(g)]' &= f'(g)g', \\
[f(g)]'' &= [f'(g)g']' = [f'(g)]'g' + f'(g)g'' = f''(g)g'g' + f'(g)g'',
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
[f(g)]^{(3)} &= [f''(g)g'g' + f'(g)g'']' \\
&= f'''(g)(g')^3 + f''(g)2g'g'' + f''(g)g'g'' + f'(g)g''' \\
&= f^{(3)}(g)(g')^3 + 3f''(g)g'g'' + f'(g)g^{(3)}.
\end{aligned}$$

∎

解.

$$\begin{aligned}
[f(g)]^{(4)} &= \left[f^{(3)}(g)(g')^3 + 3f''(g)g'g'' + f'(g)g^{(3)}\right]' \\
&= [f^{(4)}(g)(g')^4 + f^{(3)}3(g')^2g''] + 3[f^{(3)}(g)g'g'g'' + f''(g)g''g'' + f''(g)g'g^{(3)}] \\
&\qquad + [f''(g)g'g^{(3)} + f'(g)g^{(4)}] \\
&= f^{(4)}(g)(g')^4 + 6f^{(3)}(g')^2g'' + 3f''(g)(g'')^2 + 4f''(g)g'g^{(3)} + f'(g)g^{(4)}
\end{aligned}$$

解.

$$
\begin{aligned}
[f(g)]^{(4)} &= \left[f^{(3)}(g)(g')^3 + 3f''(g)g'g'' + f'(g)g^{(3)}\right]' \\
&= [f^{(4)}(g)(g')^4 + f^{(3)}3(g')^2g''] + 3[f^{(3)}(g)g'g'g'' + f''(g)g''g'' + f''(g)g'g^{(3)}] \\
&\quad\quad + [f''(g)g'g^{(3)} + f'(g)g^{(4)}] \\
&= f^{(4)}(g)(g')^4 + 6f^{(3)}(g')^2g'' + 3f''(g)(g'')^2 + 4f''(g)g'g^{(3)} + f'(g)g^{(4)}
\end{aligned}
$$

详见问题3229. ∎

其他例子

习题

求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的各阶导数.

其他例子

习题

求函数 $f(x) = e^x \cos x$ 的各阶导数.

解. 参见问题2614. ∎