隐函数的求导

徐海峰

October 25, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

隐函数求导

由二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 隐函数的求导基于**隐函数存在定理**. (这里我们总是假设在一定条件下, 隐函数是存在的. 即承认这个定理.)

由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 隐函数的求导基于**隐函数存在定理**. (这里我们总是假设在一定条件下, 隐函数是存在的. 即承认这个定理.)

假设由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数为 $y=y(x)$, 将其代入方程即得关于 x 的一元方程 $F(x,y(x))=0$, 从而可以求导(如果可以求的话).

由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 隐函数的求导基于**隐函数存在定理**. (这里我们总是假设在一定条件下, 隐函数是存在的. 即承认这个定理.)

假设由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数为 $y=y(x)$, 将其代入方程即得关于 x 的一元方程 $F(x,y(x))=0$, 从而可以求导(如果可以求的话).

例

求由方程 $x^2+y^2=a^2$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

由二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 隐函数的求导基于**隐函数存在定理**. (这里我们总是假设在一定条件下, 隐函数是存在的. 即承认这个定理.)

假设由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数为 $y = y(x)$, 将其代入方程即得关于 x 的一元方程 $F(x, y(x)) = 0$, 从而可以求导(如果可以求的话).

例

求由方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, 注意 y 是 x 的函数.

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

由二元方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 隐函数的求导基于**隐函数存在定理**. (这里我们总是假设在一定条件下, 隐函数是存在的. 即承认这个定理.)

假设由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数为 $y = y(x)$, 将其代入方程即得关于 x 的一元方程 $F(x, y(x)) = 0$, 从而可以求导(如果可以求的话).

例

求由方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, 注意 y 是 x 的函数.

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

这推出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. ∎

例

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy^2 - e^2 = 0$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

例

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy^2-e^2=0$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, y 是 x 的函数.

$$e^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y^2+x\cdot 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

例

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy^2 - e^2 = 0$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, y 是 x 的函数.

$$e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + x \cdot 2y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^2}{2xy + e^y}.$$

例

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + xy^2 - e^2 = 0$ 确定, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解. 方程两边同时对 x 求导, y 是 x 的函数.

$$e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y^2 + x \cdot 2y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^2}{2xy + e^y}.$$

原方程中令 $x = 0$, 得 $e^y - e^2 = 0$, 故 $y = 2$. 因此

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = -\left.\frac{y^2}{2xy + e^y}\right|_{x=0} = -\frac{4}{e^2}$$

∎

例

求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

例

求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 原方程可改写为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \arctan\frac{y}{x}.$$

例

求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 原方程可改写为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导, y 视为 x 的函数, 得

$$\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{y}{x})'_x$$

$$\Rightarrow\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'x-y}{x^2}$$

$$\Rightarrow x+yy'=y'x-y,$$

例

求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x}$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解. 原方程可改写为

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \arctan\frac{y}{x}.$$

两边对 x 求导, y 视为 x 的函数, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{y}{x})'_x \\
\Rightarrow\ &\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'x-y}{x^2} \\
\Rightarrow\ &x+yy' = y'x-y,
\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

续

解. 上式两边再对 x 求导, y 视为 x 的函数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = y'' &= \frac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2}\\ &= \frac{(x-y+xy'-yy')-(x+y-xy'-yy')}{(x-y)^2}\\ &= \frac{2(xy'-y)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{2\left(x\frac{x+y}{x-y}-y\right)}{(x-y)^2}\\ &= \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}.\end{aligned}$$

∎

隐函数定理

隐函数定理

隐函数定理是一个非常重要的定理. 推广到高维时被称为**隐映射定理**.

隐函数定理

隐函数定理是一个非常重要的定理. 推广到高维时被称为**隐映射定理**.在讲隐函数定理前, 必须先介绍二元函数的偏导数.

由参数方程所确定的函数的求导法则

定义

如果参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in I \tag{*}$$

确定了 y 与 x 之间的对应关系可以表示为 y 关于 x 的一个函数, 则称此函数 $y = y(x)$ 是由此参数方程所确定的函数.

定义

如果参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad t \in I \tag{*}$$

确定了 y 与 x 之间的对应关系可以表示为 y 关于 x 的一个函数, 则称此函数 $y = y(x)$ 是由此参数方程所确定的函数.

当然, 若确定的是 x 关于 y 的函数关系, 则称 $x = x(y)$ 是由此参数方程所确定的函数.

命题

设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $(*)$ 所确定的的函数, $x=\varphi(t)$ 在 t_0 附近有反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t_0)\neq 0$. 则 $y=y(x)$ 在 $x_0=\varphi(t_0)$ 处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)=y'(x_0)=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

命题

设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $(*)$ 所确定的的函数, $x = \varphi(t)$ 在 t_0 附近有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t_0) \neq 0$. 则 $y = y(x)$ 在 $x_0 = \varphi(t_0)$ 处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Proof.

$y = y(x)$ 可看作是由函数 $y = \psi(t)$ 和 $t = \varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

命题

设 $y = y(x)$ 是由参数方程 $(*)$ 所确定的的函数, $x = \varphi(t)$ 在 t_0 附近有反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$. 设 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t_0) \neq 0$. 则 $y = y(x)$ 在 $x_0 = \varphi(t_0)$ 处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = y'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Proof.

$y = y(x)$ 可看作是由函数 $y = \psi(t)$ 和 $t = \varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.则由复合函数的求导法则

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(t_0) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}(t_0) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

□

若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在区间 I 上都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $y = y(x)$ 在每一点 x 处可导. 可以简写为

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in I.$$

若 $\varphi(t), \psi(t)$ 在区间 I 上都可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $y = y(x)$ 在每一点 x 处可导. 可以简写为

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in I.$$

命题

如果 $x = \varphi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ 是定义在 t_0 附近的可微函数, 并且在 t_0 处二阶可导, 则 $y = y(x)$ 在 $x_0 = \varphi(t_0)$ 处二阶可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=x_0} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}\bigg|_{t_0}.$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{y'(x)-y'(x_0)}{x-x_0}\\
=&\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}-\frac{\psi'(t_0))}{\varphi'(t_0)}}{x-x_0}\\
=&\lim_{t\to t_0}\frac{\psi'(t)\varphi'(t_0)-\psi'(t_0)\varphi'(t)}{\varphi'(t)\varphi'(t_0)(t-t_0)}\cdot\frac{t-t_0}{x-x_0}\\
=&\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\varphi'(t)\varphi'(t_0)}\left[\frac{\psi'(t)-\psi'(t_0)}{t-t_0}\varphi'(t_0)-\frac{\varphi'(t)-\varphi'(t_0)}{t-t_0}\psi'(t_0)\right]\cdot\frac{1}{\frac{x-x_0}{t-t_0}}\\
=&\frac{1}{[\varphi'(t_0)]^2}\left[\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)\right]\cdot\frac{1}{\varphi'(t_0)}\\
=&\frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0)-\varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{[\varphi'(t_0)]^3}.
\end{aligned}
$$

□

Proof.

或者应用前面 $\frac{\psi}{\varphi}$ 的求导法则. 若 ψ, φ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $\frac{\psi}{\varphi}$ 在 t_0 处也可导.

Proof.

或者应用前面 $\frac{\psi}{\varphi}$ 的求导法则. 若 ψ, φ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $\frac{\psi}{\varphi}$ 在 t_0 处也可导.为简略, 以下将 t_0 写为 t.

Proof.

或者应用前面 $\frac{\psi}{\varphi}$ 的求导法则. 若 ψ, φ 在 t_0 处可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 则 $\frac{\psi}{\varphi}$ 在 t_0 处也可导.为简略, 以下将 t_0 写为 t.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \\ &= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}\end{aligned}$$

□