微分中值定理的应用

徐海峰

November 2, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

单调函数

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微. 如果 $f'(x) = 0, \forall\ x \in (a, b)$, 则 f 为常数.

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微. 如果 $f'(x) = 0, \forall\, x \in (a, b)$, 则 f 为常数.

Proof.

任取 $x, y \in [a, b]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0,$$

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微. 如果 $f'(x) = 0, \forall\ x \in (a, b)$, 则 f 为常数.

Proof.

任取 $x, y \in [a, b]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) = 0,$$

因此 f 为常值函数. $\square$

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

Proof.

不妨设 f 是单调递增函数,

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

Proof.

不妨设 f 是单调递增函数,则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x \to x_0$ 时始终非负.

命题

设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

Proof.

不妨设 f 是单调递增函数,则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x \to x_0$ 时始终非负.因此当 $x_0 \in (a,b)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

Proof.

不妨设 f 是单调递增函数,则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x \to x_0$ 时始终非负.因此当 $x_0 \in (a, b)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

反之, 不妨设 $f'(x) \geqslant 0, \forall\, x \in (a, b)$.

命题

设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 则 f 为单调函数当且仅当 f' 不变号.

Proof.

不妨设 f 是单调递增函数,则 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $x \to x_0$ 时始终非负.因此当 $x_0 \in (a, b)$ 时,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

反之, 不妨设 $f'(x) \geqslant 0, \forall\, x \in (a, b)$.任取 $x_1 < x_2 \in [a, b]$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

因此 f 是单调递增的. $\square$

注

若恒有 $f' > 0$, 则 f 严格单调递增;

注

若恒有 $f' > 0$, 则 f 严格单调递增;若恒有 $f' < 0$, 则 f 严格单调递减.

注

若恒有 $f' > 0$, 则 f 严格单调递增;若恒有 $f' < 0$, 则 f 严格单调递减.

但反之不然, 例如 $f(x) = x^3$ 严格单调递增, 但 $f'(0) = 0$.

反函数定理

首先回顾一下 Calculus_chap1-8.pdf 中讲到的关于单调函数的一个命题.

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的连续函数, 则 f 可逆当且仅当 f 是严格单调函数.

首先回顾一下 Calculus_chap1-8.pdf 中讲到的关于单调函数的一个命题.

命题

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的连续函数, 则 f 可逆当且仅当 f 是严格单调函数.

(见[Mei] 书P.88, 推论 3.4.7.)

定理

设 f 为区间 I 上的可微函数, 如果 f 的导数处处非零, 则 $f : I \to f(I)$ 是可逆的, 且其逆函数也可微.

定理

设 f 为区间 I 上的可微函数, 如果 f 的导数处处非零, 则 $f: I \to f(I)$ 是可逆的, 且其逆函数也可微.

Proof.

任取 $x_1 < x_2 \in I$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

定理

设 f 为区间 I 上的可微函数, 如果 f 的导数处处非零, 则 $f : I \to f(I)$ 是可逆的, 且其逆函数也可微.

Proof.

任取 $x_1 < x_2 \in I$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

由于 $f'(\xi) \neq 0$, 故 $f(x_2) \neq f(x_1)$. 因此 f 是单射. 故 $f : I \to f(I)$ 是可逆的.

定理

设 f 为区间 I 上的可微函数, 如果 f 的导数处处非零, 则 $f: I \to f(I)$ 是可逆的, 且其逆函数也可微.

Proof.

任取 $x_1 < x_2 \in I$, 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

由于 $f'(\xi) \neq 0$, 故 $f(x_2) \neq f(x_1)$. 因此 f 是单射. 故 $f: I \to f(I)$ 是可逆的.由于定义在区间上的连续函数可逆当且仅当严格单调, 因此 f 是严格单调函数. 再由反函数求导法则([Mei]命题4.1.6)知 f 的逆函数也可微. □

极值点的判定

命题

设 $\delta > 0$, f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内连续, 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内可微. 如果

$$f'(x_0) \leqslant 0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x_0) \geqslant 0,\ x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

则 x_0 为 f 的极小值点;

极值点的判定

命题

设 $\delta > 0$, f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内连续, 在 $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内可微. 如果

$$f'(x_0) \leqslant 0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x_0) \geqslant 0,\ x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

则 x_0 为 f 的极小值点;如果

$$f'(x_0) \geqslant 0,\ x \in (x_0 - \delta, x_0); \quad f'(x_0) \leqslant 0,\ x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

则 x_0 为 f 的极大值点.

命题

设 f 在内点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, 则

- 如果 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 f 的（严格）极小值点;

极值点的判定

命题

设 f 在内点 x_0 处二阶可导, 且 $f'(x_0) = 0$, 则

- 如果 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为 f 的（严格）极小值点;
- 如果 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为 f 的（严格）极大值点.

例

设 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

例

设 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Proof.

考虑函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $x > -1$. 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x},$$

当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$.

例

设 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, 证明

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Proof.

考虑函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$, $x > -1$. 则 $f(0) = 0$, 且

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x},$$

当 $-1 < x < 0$ 时 $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时 $f'(x) < 0$.因此 $f(x) \leqslant f(0) = 0$, $\forall x > -1$, 且等号仅在 $x = 0$ 处成立. $\square$

Proof.

类似地, 考虑 $g(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

Proof.

类似地, 考虑 $g(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$.

Proof.

类似地, 考虑 $g(x) = ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2},$$

当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$.因此 $g(x) \geqslant g(0) = 0$, 且等号仅在 $x = 0$ 处成立. $\square$

例

证明: 当 $x > 0$ 时,

$$e^{\frac{x}{1+x}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

例

证明：当 $x > 0$ 时，

$$e^{\frac{x}{1+x}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

Proof.

取对数后不等式等价于

$$\frac{x}{1+x} < x \ln(1 + \frac{1}{x}) < 1.$$

例

证明：当 $x > 0$ 时，

$$e^{\frac{x}{1+x}} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e.$$

Proof.

取对数后不等式等价于

$$\frac{x}{1+x} < x\ln(1 + \frac{1}{x}) < 1.$$

这等价于

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$$

$\square$

例

设 $b > a > 1$, 证明 $ba^b > ab^a$.

例

设 $b > a > 1$, 证明 $ba^b > ab^a$.

Proof.

在欲证不等式两边取对数, 得

$$lnb + b\ln a > \ln a + a\ln b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{lna}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

例

设 $b > a > 1$, 证明 $ba^b > ab^a$.

Proof.

在欲证不等式两边取对数, 得

$$lnb + b\ln a > \ln a + a\ln b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{lna}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ $(x > 1)$.

例

设 $b > a > 1$, 证明 $ba^b > ab^a$.

Proof.

在欲证不等式两边取对数, 得

$$lnb + b\ln a > \ln a + a\ln b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{lna}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ $(x > 1)$.求导

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

由于

$$\frac{x-1}{1+(x-1)} < \ln(1+(x-1)), \quad \forall x > 1,$$

故 $f'(x) < 0$, $\forall x > 1$.

例

设 $b > a > 1$, 证明 $ba^b > ab^a$.

Proof.

在欲证不等式两边取对数, 得

$$lnb + b\ln a > \ln a + a\ln b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{lna}{a-1} > \frac{\ln b}{b-1}.$$

考虑函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ $(x > 1)$.求导

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1) - x\ln x}{x(x-1)^2}.$$

由于

$$\frac{x-1}{1+(x-1)} < \ln(1+(x-1)), \quad \forall x > 1,$$

故 $f'(x) < 0$, $\forall x > 1$.即 f 在 $(1, +\infty)$ 上严格单调递减. 证毕. $\square$

习题

证明下列不等式:

$$\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \quad \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$