不定积分

徐海峰

November 21, 2023

数学科学学院，扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

研究的问题

前面我们研究了函数的可导性质.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.自然, 我们要问:

- 方程 $(*)$ 对所有 f 都存在解吗?

前面我们研究了函数的可导性质.现在我们考虑这样的问题,即给定一个函数 $f(x)$, 是否存在另一个函数 $F(x)$, 使得

$$F'(x) = f(x) \tag{*}$$

成立.

如果存在这样的函数 F, 则称它是方程 $(*)$ 的解.自然, 我们要问:

- 方程 $(*)$ 对所有 f 都存在解吗?
- 如果 F 是一个解, 则显然 $F + C$ (C 为常数)也是一个解, 除此之外还有其他的解吗?

基本定理

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon |x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.我们断言 $\xi = b$.

命题

设 f 为区间 I 上的可微函数, 则 $f' \equiv 0$ 当且仅当 $f = C$ 为常值函数.

这个命题利用微分中值定理即可证明.我们也可以不使用微分中值定理来证明. （见梅加强《数学分析》命题4.3.1）

Proof.

只要证明必要性即可.设 $f'(x) = 0, \forall x \in I$.任取 $a < b \in I$, 我们证明必有 $f(a) = f(b)$.

设 $\varepsilon > 0$ 是任意取定的正数.考虑集合

$$A = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon|x - a|\} \subset [a, b].$$

因为 $a \in A$, 因此 A 非空.设 ξ 为 A 的上确界.由 f 的连续性知 $\xi \in A$.我们断言 $\xi = b$.先简要说明 $\xi \in A$. □

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - \delta - a|.$$

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon |\xi - \delta - a|.$$

两边取极限 $\delta \to 0^+$, 由 f 的连续性,

$$|f(\xi) - f(a)| \leqslant \varepsilon |\xi - a|.$$

Proof.

注

若 A 是单点集, 即只有元素 a, 则 $\xi = a$.若 A 不是单点集, 即存在 $x_1 \in A$, $x_1 > a$.由于 ξ 是 A 的上确界, 故对任意 $\delta > 0$, $\xi - \delta \in A$, 即

$$|f(\xi - \delta) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - \delta - a|.$$

两边取极限 $\delta \to 0^+$, 由 f 的连续性,

$$|f(\xi) - f(a)| \leqslant \varepsilon|\xi - a|.$$

即 $\xi \in A$.

$\square$

Proof.

下面论述 $\xi = b$.

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

续

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,

续

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,因此只能有 $\xi = b$. 即 $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon|a - b|$.

Proof.

下面论述 $\xi = b$.事实上, 如果 $\xi < b$, 则由 $f'(\xi) = 0$ 以及导数的定义知存在 ζ, 使得 $\xi < \zeta \leqslant b$, 且

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi}\right| = \left|\frac{f(\zeta) - f(\xi)}{\zeta - \xi} - f'(\xi)\right| \leqslant \varepsilon,$$

即有

$$|f(\zeta) - f(\xi)| \leqslant \varepsilon|\zeta - \xi|.$$

因此, 由 $\xi < \zeta \leqslant b$ 以及三角不等式可得

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f(a)| &\leqslant |f(\zeta) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(a)| \\ &\leqslant \varepsilon|\zeta - \xi| + \varepsilon|\xi - a| = \varepsilon|\zeta - a|. \end{aligned}$$

这说明 $\zeta \in A$, 这和 ξ 的选择相矛盾,因此只能有 $\xi = b$. 即 $|f(a) - f(b)| \leqslant \varepsilon|a - b|$. 因为 ε 是任取的, 令 $\varepsilon \to 0^+$, 上式表明 $f(a) = f(b)$. $\square$

原函数的定义

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

因此原函数不唯一.

定义

给定函数 f, 方程 $F'(x) = f(x)$ 的一个可微解 F 称为函数 f 的一个**原函数**.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则显然 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数（这里 C 可以是任意常数）.

因此原函数不唯一.

由刚才的命题知, 若 $G'(x) = f(x)$, 则 $F(x) - G(x) = C$.

定义 (不定积分)

设函数 f 在区间 I 上有原函数, 则我们用记号

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 的原函数的一般表达式, 即如果 F 为 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in I,$$

期中 C 为常数.

定义 (不定积分)

设函数 f 在区间 I 上有原函数, 则我们用记号

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

表示 f 的原函数的一般表达式, 即如果 F 为 f 的一个原函数, 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad x \in I,$$

期中 C 为常数.

我们后面讨论记号 $\mathrm{d}x$ 的作用.

不定积分的性质

命题

如果 F 是 f 的原函数, 则 $\mathrm{d}F = F'(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$, 因此,

$$d\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x.$$

常见函数的不定积分

$C' = 0$

$$\int 0 \mathrm{d}x = C$$

$(e^x)' = e^x$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$$

$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha$

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0, a \neq 1)$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C$$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$(\cos x)' = -\sin x$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$$\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$$\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$$\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$$\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$(\sinh x)' = \cosh x$

$$\int \cosh x \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$$\int \sinh x \mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$

$$\int \tanh^2 x \mathrm{d}x = x - \tanh x + C$$

$(\coth x)' = 1 - (\coth x)^2$

$$\int \coth^2 x \mathrm{d}x = x - \coth x + C$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$$

$(x \ln x)' = \ln x + 1$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\arccos x + C$$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\operatorname{arccot} x + C$$

$(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{1-x^2}$

$$\int \frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$(x \arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \arcsin x \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

从上面求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x\mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

注意到 $x = f(g(x))$, 以及条件 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$xg'(x) = f(g(x))g'(x) = F'(g(x))g'(x) = [F(g(x))]'.$$

从上面求 $\int \arcsin x \mathrm{d}x$ 以及 $\int \ln x \mathrm{d}x$ 的方法, 我们可以总结出下面的命题.

命题

设 f 的原函数为 F. 如果 f 可逆, 且其逆函数 g 可微, 则

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F(g(x)) + C.$$

Proof.

我们考虑 $xg(x)$,

$$[xg(x)]' = g(x) + xg'(x),$$

注意到 $x = f(g(x))$, 以及条件 $F'(x) = f(x)$, 我们有

$$xg'(x) = f(g(x))g'(x) = F'(g(x))g'(x) = [F(g(x))]'.$$

因此

$$[xg(x) - F(g(x))]' = g(x).$$

猜测原函数

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.
$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$
为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

例

求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x.$$

为使 $\sin x$ 出现在分母上, 考虑 $\ln|\sin x|$ 的导数.

$$(\ln|\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x},$$

因此

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C.$$

∎

猜测原函数

例

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

猜测原函数

例

$$\int \tan x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

$$\int \cot x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C$$

利用公式求解

例

求不定积分 $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x.$

利用公式求解

例

求不定积分 $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x$.

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.

利用公式求解

例

求不定积分 $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x.$

解. $f(x) = \cot x$ 的反函数为 $g(x) = \operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x) = \ln|\sin x|$,

利用公式求解

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x \mathrm{d}x.$

解. $f(x)=\cot x$ 的反函数为 $g(x)=\operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x)=\ln|\sin x|$,代入公式

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x)-F(g(x))+C,$$

例

求不定积分 $\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x$.

解. $f(x)=\cot x$ 的反函数为 $g(x)=\operatorname{arccot} x$.由上面的例子 f 具有原函数 $F(x)=\ln|\sin x|$,代入公式

$$\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x)-F(g(x))+C,$$

得

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x &= x\operatorname{arccot} x-\ln|\sin\operatorname{arccot} x|+C\\ &= x\operatorname{arccot} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

换元法

不定积分的符号

到目前为止, 我们在计算 f 的不定积分时并没有用到被积表达式中的 $\mathrm{d}x$. 如果 $f(x)$ 的不定积分记作

$$\int f(x)$$

或其他符号, 会出现什么问题.

不定积分的符号

到目前为止, 我们在计算 f 的不定积分时并没有用到被积表达式中的 $\mathrm{d}x$. 如果 $f(x)$ 的不定积分记作

$$\int f(x)$$

或其他符号, 会出现什么问题.

例子

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

例子

例

求不定积分 $\displaystyle\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$,

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$, 则

$$\int (2x)^n = \int t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} (2x)^{n+1} + C.$$

例子

例

求不定积分 $\int (2x)^n$, 这里 $n \geqslant 1$.

Proof.

$$\int (2x)^n = \int 2^n x^n = \frac{2^n}{n+1} x^{n+1} + C.$$

若令 $t = 2x$, 则

$$\int (2x)^n = \int t^n = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} (2x)^{n+1} + C.$$

第一个等号是换元, 最后一个等号是回代. 要求能换元及可以回代是很自然的想法, 但是所得两个结果不一致. □

若令 $x = \varphi(t)$, φ 可导.

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

若令 $x = \varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x) = f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x) = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C = \int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 将 x 换为 $\varphi(t)$, 应有

$$\int f(x)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

若令 $x=\varphi(t)$, φ 可导.F 是 f 的原函数, 所以 $F'(x)=f(x)$.我们希望能换元是指

$$\int f(x)=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t)).$$

但复合函数 $F(\varphi(t))$ 对 t 的导数为

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 最右边的不定积分应为

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此, 将 x 换为 $\varphi(t)$, 应有

$$\int f(x)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

$f(x)$ 对应到 $f(\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, 两者并不相等, 但是 $f(x)\mathrm{d}x$ 却和 $f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi$ 相等.

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

当换元时, 比如令 $x=\varphi(t)$ (φ 可导), 则直接代入, 得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

于是记 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

当换元时, 比如令 $x=\varphi(t)$ (φ 可导), 则直接代入, 得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这样保证了换元和回代的正确性.

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = F(\phi(x)) + C;$$

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u=\phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(\phi(x))+C;$$

(2) 设 ϕ 可逆, 且其逆可微, $\phi(I)=J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G, 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)\mathrm{d}u=G(\phi^{-1}(u))+C.$$

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.