定积分的性质

徐海峰整理

November 12, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

定积分的性质

约定

当 $a < b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

约定

当 $a < b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $a = b$ 时,

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

约定

当 $a<b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $a=b$ 时,

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

也可以这样来理解, 当 $a<b$ 时, $[b,a]$ 的分割 π' 为

$$\pi':\ b = x_n > x_{n-1} > \cdots > x_2 > x_1 > x_0 = a,$$

约定

当 $a < b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $a = b$ 时,

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

也可以这样来理解, 当 $a < b$ 时, $[b, a]$ 的分割 π' 为

$$\pi' : \ b = x_n > x_{n-1} > \cdots > x_2 > x_1 > x_0 = a,$$

第 i 个小区间为 $[x_i, x_{i-1}]$, 其长度为 $\delta x_i = x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1}) = -\Delta x_i$.

约定

当 $a<b$ 时,

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

当 $a=b$ 时,

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

也可以这样来理解, 当 $a<b$ 时, $[b,a]$ 的分割 π' 为

$$\pi':\ b = x_n > x_{n-1} > \cdots > x_2 > x_1 > x_0 = a,$$

第 i 个小区间为 $[x_i, x_{i-1}]$, 其长度为 $\delta x_i = x_{i-1} - x_i = -(x_i - x_{i-1}) = -\Delta x_i$.因此

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi'\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta x_i = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(-\Delta x_i) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

基本性质

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上可积,

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, $c \in (a, b)$,

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, $c \in (a, b)$,则 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积,

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积, $c \in (a, b)$,则 f 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

可积函数的线性组合与数乘

定理

(1) 设 f, g 在 $[a,b]$ 上可积, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,则 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, $c \in (a,b)$,则 f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

(1) 任给 $\varepsilon > 0$, 由 f, g 可积知, 存在 $\delta > 0$, 当 $[a,b]$ 的分割 π 满足 $\|\pi\| < \delta$ 时, □

Proof.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

Proof.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}[\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)]\Delta x_i - \left(\lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)\right| \\
\leqslant&|\lambda|\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + |\mu|\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&|\lambda|\varepsilon + |\mu|\varepsilon = (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

Proof.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{i=1}^{n}[\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)]\Delta x_i - \left(\lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)\right| \\ \leqslant &|\lambda|\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + |\mu|\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant &|\lambda|\varepsilon + |\mu|\varepsilon = (|\lambda| + |\mu|)\varepsilon, \end{aligned}$$

根据积分的定义知, $\lambda f + \mu g$ 可积, 且积分为

$$\lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Proof.

(2) 前面已证若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则在小区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 上也可积.

Proof.

(2) 前面已证若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则在小区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上也可积.设 π_1,π_2 分别是 $[a,c]$, $[c,b]$ 的分割, 当 $\|\pi_1\|\to 0$, $\|\pi_2\|\to 0$ 时, $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ 也满足 $\|\pi\|\to 0$.

Proof.

(2) 前面已证若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则在小区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上也可积.设 π_1,π_2 分别是 $[a,c]$, $[c,b]$ 的分割, 当 $\|\pi_1\|\to 0$, $\|\pi_2\|\to 0$ 时, $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ 也满足 $\|\pi\|\to 0$.于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}} \sum_{\pi_1\cup\pi_2} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|\pi_1\|\to 0}\sum_{\pi_1} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|\pi_2\|\to 0}\sum_{\pi_2} f(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

注

若 c 在 $[a, b]$ 之外, 不妨设 $b < c$,

注

若 c 在 $[a,b]$ 之外, 不妨设 $b<c$,则要先假设 f 在 $[b,c]$ 上可积.

注

若 c 在 $[a, b]$ 之外, 不妨设 $b < c$,则要先假设 f 在 $[b, c]$ 上可积.加上条件 f 在 $[a, b]$ 上可积可推出 f 在 $[a, c]$ 上可积.

注

若 c 在 $[a, b]$ 之外, 不妨设 $b < c$,则要先假设 f 在 $[b, c]$ 上可积.加上条件 f 在 $[a, b]$ 上可积可推出 f 在 $[a, c]$ 上可积.因此

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

注

若 c 在 $[a,b]$ 之外, 不妨设 $b<c$,则要先假设 f 在 $[b,c]$ 上可积.加上条件 f 在 $[a,b]$ 上可积可推出 f 在 $[a,c]$ 上可积.因此

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

推出

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x\\&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注

若 c 在 $[a,b]$ 之外, 不妨设 $b<c$,则要先假设 f 在 $[b,c]$ 上可积.加上条件 f 在 $[a,b]$ 上可积可推出 f 在 $[a,c]$ 上可积.因此

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

推出

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最后一个等号是根据前面的约定: “交换积分上下限则产生负号”.

定理

- *(1)* 设 f 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 则其积分非负;

定理

- *(1)* 设 f 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 则其积分非负;
- *(2)* 如果 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理

- *(1)* 设 f 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 则其积分非负;
- *(2)* 如果 f,g 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- *(3)* 如果 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

定理

- *(1)* 设 f 为 $[a, b]$ 上的非负可积函数, 则其积分非负;
- *(2)* 如果 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \geqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

- *(3)* 如果 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Proof.

(1) 如果 f 非负, 则其积分和总是非负, 从而积分非负. □

Proof.

(2) f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 这推出 $f - g$ 在 $[a, b]$ 上可积.

Proof.

(2) f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 这推出 $f - g$ 在 $[a, b]$ 上可积.又 $f \geqslant g$, 由 (1)得

$$0 \leqslant \int_a^b (f - g)x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

(2) f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 这推出 $f - g$ 在 $[a, b]$ 上可积.又 $f \geqslant g$, 由 (1)得

$$0 \leqslant \int_a^b (f - g)x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

□

Proof.

(3) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积,

Proof.

(3) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

Proof.

(3) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$,

Proof.

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)|-|f(y)|\big|\leqslant|f(x)-f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$,从而

$$\sum_{\pi}\omega_i(|f|)\Delta x_i<\varepsilon,$$

Proof.

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)|-|f(y)|\big|\leqslant|f(x)-f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$,从而

$$\sum_{\pi}\omega_i(|f|)\Delta x_i<\varepsilon,$$

这说明 $|f|$ 可积.

Proof.

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)|-|f(y)|\big|\leqslant|f(x)-f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|)\leqslant\omega_i(f)$,从而

$$\sum_{\pi}\omega_i(|f|)\Delta x_i<\varepsilon,$$

这说明 $|f|$ 可积.因为

$$\Big|\sum_{\pi}f(\xi_i)\Delta x_i\Big|\leqslant\sum_{\pi}|f(\xi_i)|\Delta x_i,$$

Proof.

(3) 设 f 在 $[a, b]$ 上可积,则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割 π, 满足

$$\sum_{\pi} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon.$$

因为 $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|) \leqslant \omega_i(f)$,从而

$$\sum_{\pi} \omega_i(|f|)\Delta x_i < \varepsilon,$$

这说明 $|f|$ 可积.因为

$$\Big|\sum_{\pi} f(\xi_i)\Delta x_i\Big| \leqslant \sum_{\pi} |f(\xi_i)|\Delta x_i,$$

取极限知

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

$\square$

积分第一中值定理

下面的**积分第一中值定理**(也称**积分第一中值公式**)是连续函数的积分中值定理的推广.

下面的**积分第一中值定理**(也称**积分第一中值公式**)是连续函数的积分中值定理的推广.

定理 (积分第一中值定理)

设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

下面的**积分第一中值定理**(也称**积分第一中值公式**)是连续函数的积分中值定理的推广.

定理 (积分第一中值定理)

设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

可积推出有界, 因此这里的上下确界都是存在的.

下面的**积分第一中值定理**(也称**积分第一中值公式**)是连续函数的积分中值定理的推广.

定理 (积分第一中值定理)

设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

可积推出有界, 因此这里的上下确界都是存在的.不妨设 $g(x) \geqslant 0$.

下面的**积分第一中值定理**(也称**积分第一中值公式**)是连续函数的积分中值定理的推广.

定理 (积分第一中值定理)

设 f, g 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 μ, $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

可积推出有界, 因此这里的上下确界都是存在的.不妨设 $g(x) \geqslant 0$.则

$$\left(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\right)g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right)g(x).$$

$\square$

Proof.

因此

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

因此

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

上式说明, 如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,

Proof.

因此

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

上式说明, 如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,此时定理当然成立.

Proof.

因此

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

上式说明, 如果 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,此时定理当然成立.不然, 令

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

Proof.

因此

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

上式说明, 如果 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,此时定理当然成立.不然, 令

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

则

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \mu \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

□

牛顿–莱布尼茨定理

回顾, 不是所有函数都有原函数, 比如 Dirichlet 函数.

回顾, 不是所有函数都有原函数, 比如 Dirichlet 函数.

但是, 区间 I 上的连续函数都有原函数. 这就是所谓的 Newton-Leibniz 定理.

引理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

引理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

Proof.

可积函数是有界的, 故设 $|f(x)|\leqslant M,\ \forall\ x\in[a,b]$.

可积函数的变上限积分

引理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

Proof.

可积函数是有界的, 故设 $|f(x)|\leqslant M$, $\forall\ x\in[a,b]$.不妨设 $x_1\leqslant x_2\in[a,b]$,

引理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

Proof.

可积函数是有界的，故设 $|f(x)|\leqslant M,\ \forall\ x\in[a,b]$.不妨设 $x_1\leqslant x_2\in[a,b]$,则

$$|F(x_2)-F(x_1)|=\left|\int_a^{x_2}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant M|x_2-x_1|.$$

引理

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b],$$

则 F 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

Proof.

可积函数是有界的, 故设 $|f(x)|\leqslant M,\ \forall\ x\in[a,b]$.不妨设 $x_1\leqslant x_2\in[a,b]$,则

$$|F(x_2)-F(x_1)|=\left|\int_a^{x_2} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_1} f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant M|x_2-x_1|.$$

因此 F 为 Lipschitz 函数, 当然连续. □

如果 f 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则这个变上限积分定义的函数 $F(x)$ 还是可导的, 其导数是 $f(x)$.

如果 f 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则这个变上限积分定义的函数 $F(x)$ 还是可导的, 其导数是 $f(x)$.

定理

设 f 是区间 I 上的连续函数, 则函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in I$$

是 f 的一个原函数.

如果 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则这个变上限积分定义的函数 $F(x)$ 还是可导的, 其导数是 $f(x)$.

定理

设 f 是区间 I 上的连续函数, 则函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in I$$

是 f 的一个原函数.

Proof.

$\square$

积分第二中值定理

定理 (积分第二中值定理)

设 f 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 (积分第二中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

- *(1)* 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0,\ \forall\, x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (积分第二中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

- *(1)* 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0, \forall\, x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$
- *(2)* 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0, \forall\, x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

定理 (积分第二中值定理)

设 f 在 $[a,b]$ 上可积.

- *(1)* 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x)\geqslant 0, \forall\, x\in[a,b]$, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x.$$

- *(2)* 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x)\geqslant 0, \forall\, x\in[a,b]$, 则存在 $\eta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

- *(3)* 一般地, 如果 g 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\zeta} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\zeta}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

(1) 记 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,

Proof.

(1) 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.

Proof.

(1) 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.

Proof.

(1) 记 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)|\leqslant K,\ \forall\ x\in[a,b]$.

Proof.

(1) 记 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)| \leqslant K, \forall\ x \in [a,b]$.

因为 g 单调递减, 故 g 可积.

Proof.

(1) 记 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a, b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.又因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a, b]$.

因为 g 单调递减, 故 g 可积.从而任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割
π : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Proof.

(1) 记 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 F 在 $[a,b]$ 上连续, 故达到最大值 M 和最小值 m.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)|\leqslant K,\ \forall\ x\in[a,b]$.

因为 g 单调递减, 故 g 可积.从而任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割
$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因此有（注意 $F(x_0)=F(a)=0$）

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&\leqslant K \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}) \\
&\leqslant K\varepsilon + M \sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + Mg(x_{n-1}) = K\varepsilon + Mg(a).
\end{aligned}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
&\leqslant K \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}) \\
&\leqslant K\varepsilon + M \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i-1}) - g(x_i)] + Mg(x_{n-1}) = K\varepsilon + Mg(a).
\end{aligned}
$$

这里第三个 $\leqslant$ 用到了 $g(x)$ 单调递减以及 $g(x) \geqslant 0$ 这两个条件. $\square$

Proof.

这里

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
=&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_{i-1}) \\
=&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)F(x_i) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + g(x_{n-1})F(x_n) - g(x_0)F(x_0) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Proof.

这里

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[F(x_i) - F(x_{i-1})] \\
=&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_{i-1}) \\
=&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})F(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)F(x_i) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + g(x_{n-1})F(x_n) - g(x_0)F(x_0) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)[g(x_{i-1}) - g(x_i)] + F(b)g(x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

最后一个等号是因为 $F(x_0) = F(a) = 0$. □

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-F$ 的最大值为 $-m$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - mg(a).$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-F$ 的最大值为 $-m$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - mg(a).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$mg(a) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a) + K\varepsilon.$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-F$ 的最大值为 $-m$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - mg(a).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$mg(a) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a) + K\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 有

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a).$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-F$ 的最大值为 $-m$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - mg(a).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$mg(a) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a) + K\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 有

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant Mg(a).$$

如果 $g(a) = 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 命题成立. $\square$

Proof.

如果 $g(a) > 0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)} \leqslant M.$$

Proof.

如果 $g(a) > 0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)} \leqslant M.$$

F 是连续函数, 由连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$F(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}.$$

Proof.

如果 $g(a) > 0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)} \leqslant M.$$

F 是连续函数, 由连续函数的介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$F(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}.$$

即,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)F(\xi) = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.又因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a, b]$.

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.又因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a, b]$.

因为 g 单调递增, 故 g 可积.

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.又因为 f 在 $[a, b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)| \leqslant K, \forall\ x \in [a, b]$.

因为 g 单调递增, 故 g 可积.从而任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

π : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i < \varepsilon.$$

Proof.

(2) 证明与 (1) 类似. 令 $\tilde{F}(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$,则 $\tilde{F}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 记最大、小值分别为 $\tilde{M}$, $\tilde{m}$.又因为 f 在 $[a,b]$ 上可积, 故 f 有界.设 $|f(x)|\leqslant K$, $\forall\ x\in[a,b]$.

因为 g 单调递增, 故 g 可积.从而任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割
π： $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(g)\Delta x_i<\varepsilon.$$

因此有（注意 $\tilde{F}(x_n)=\tilde{F}(b)=0$）

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)| \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\
&\leqslant K \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + \tilde{F}(x_0) g(x_0) \\
&\leqslant K\varepsilon + \tilde{M} \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \tilde{M} g(x_0) \\
&= K\varepsilon + \tilde{M} g(x_{n-1}) \\
&\leqslant K\varepsilon + \tilde{M} g(b).
\end{aligned}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})||f(x)|\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}g(x_{i-1})[\tilde{F}(x_{i-1})-\tilde{F}(x_i)]\\
&\leqslant K\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{F}(x_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]+\tilde{F}(x_0)g(x_0)\\
&\leqslant K\varepsilon+\tilde{M}\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_i)-g(x_{i-1})]+\tilde{M}g(x_0)\\
&= K\varepsilon+\tilde{M}g(x_{n-1})\\
&\leqslant K\varepsilon+\tilde{M}g(b).
\end{aligned}
$$

如果一开始在积分 $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 中插入的项是 $f(x)g(x_i)$, 则最后直接就放缩到 $K\varepsilon+\tilde{M}g(x_n)$. □

Proof.

这里

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\
=&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_i) \\
=&\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\tilde{F}(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_i) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + g(x_0)\tilde{F}(x_0) - g(x_{n-1})\tilde{F}(x_n) \\
=&\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + g(x_0)\tilde{F}(x_0)
\end{aligned}
$$

Proof.

这里

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\tilde{F}(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})\tilde{F}(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + g(x_0)\tilde{F}(x_0) - g(x_{n-1})\tilde{F}(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + g(x_0)\tilde{F}(x_0)
\end{aligned}
$$

最后一个等号是因为 $\tilde{F}(x_n) = \tilde{F}(b) = 0$. □

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-\tilde{F}$ 的最大值为 $-\tilde{m}$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - \tilde{m}g(b).$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-\tilde{F}$ 的最大值为 $-\tilde{m}$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - \tilde{m}g(b).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$\tilde{m}g(b) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \tilde{M}g(b) + K\varepsilon.$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-\tilde{F}$ 的最大值为 $-\tilde{m}$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - \tilde{m}g(b).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$\tilde{m}g(b) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \tilde{M}g(b) + K\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 有

$$\tilde{m}g(b) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \tilde{M}g(b).$$

Proof.

对于 $-f(x)$, 上式成为(注意 $-\tilde{F}$ 的最大值为 $-\tilde{m}$)

$$-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant K\varepsilon - \tilde{m}g(b).$$

结合以上两个不等式, 得到

$$\tilde{m}g(b) - K\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \tilde{M}g(b) + K\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, 有

$$\tilde{m}g(b) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \tilde{M}g(b).$$

如果 $g(b) = 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$. 命题成立. $\square$

Proof.

如果 $g(b)>0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(b)} \leqslant M.$$

Proof.

如果 $g(b) > 0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(b)} \leqslant M.$$

$\tilde{F}$ 是连续函数, 由连续函数的介值定理, 存在 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$\tilde{F}(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(b)}.$$

Proof.

如果 $g(b) > 0$, 则有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(b)} \leqslant M.$$

$\tilde{F}$ 是连续函数, 由连续函数的介值定理, 存在 $\eta \in [a, b]$, 使得

$$\tilde{F}(\eta) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(b)}.$$

即,

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)F(\eta) = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$\square$

(3) 如果 g 仅是单调函数, 不妨设单调递减, 则令 $h(x) = g(x) - g(b)$, 则 h 单调递减, 且 $h \geqslant 0$.

(3) 如果 g 仅是单调函数, 不妨设单调递减, 则令 $h(x)=g(x)-g(b)$, 则 h 单调递减, 且 $h\geqslant 0$.由 (1), 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x=h(a)\int_a^{\zeta} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 g 仅是单调函数, 不妨设单调递减, 则令 $h(x) = g(x) - g(b)$, 则 h 单调递减, 且 $h \geqslant 0$.由 (1), 存在 $\zeta \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.$$

将 $h(x) = g(x) - g(b)$ 代入, 得

$$\int_a^b f(x)(g(x) - g(b))\mathrm{d}x = (g(a) - g(b))\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 g 仅是单调函数, 不妨设单调递减, 则令 $h(x)=g(x)-g(b)$, 则 h 单调递减, 且 $h\geqslant 0$.由 (1), 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.$$

将 $h(x)=g(x)-g(b)$ 代入, 得

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\mathrm{d}x = (g(a)-g(b))\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.$$

推出

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= g(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - g(b)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x\\ &= g(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

若 g 单调递增, 则令 $h(x) = g(x) - g(a)$, 则 h 单调递增, 且 $h \geqslant 0$.

若 g 单调递增, 则令 $h(x)=g(x)-g(a)$, 则 h 单调递增, 且 $h\geqslant 0$.由 (2), 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x=h(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 g 单调递增, 则令 $h(x)=g(x)-g(a)$, 则 h 单调递增, 且 $h\geqslant 0$.由 (2), 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

将 $h(x)=g(x)-g(a)$ 代入, 得

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(a))\mathrm{d}x = (g(b)-g(a))\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若 g 单调递增, 则令 $h(x)=g(x)-g(a)$, 则 h 单调递增, 且 $h\geqslant 0$.由 (2), 存在 $\zeta\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = h(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

将 $h(x)=g(x)-g(a)$ 代入, 得

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(a))\mathrm{d}x = (g(b)-g(a))\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

推出

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= g(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x + g(a)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - g(a)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= g(b)\int_\zeta^b f(x)\mathrm{d}x + g(a)\int_a^\zeta f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

两个重要的例子

我们在证明积分第二中值定理的过程中, 用到了常用的“添一项减一项”的办法, 从而再利用 f 的可积性等条件进行放缩.

$$f(x)g(x) - f(x_i)g(x) + f(x_i)g(x)$$

我们在证明积分第二中值定理的过程中, 用到了常用的“添一项减一项”的办法, 从而再利用 f 的可积性等条件进行放缩.

$$f(x)g(x) - f(x_i)g(x) + f(x_i)g(x)$$

使用同样的技巧可以证明两个重要的结果. 一个是用阶梯函数逼近可积函数; 一个是黎曼-勒贝格引理.

阶梯逼近

例

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

例

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在阶梯函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

Proof.

因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

例

设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Proof.

因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $[a, b]$ 的分割

$$\pi: \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon.$$

$\square$

Proof.

在 $[a, b]$ 上定义阶梯函数 g, 使得

$$g(x) = f(x_{i-1}), \quad \forall\ x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Proof.

在 $[a, b]$ 上定义阶梯函数 g, 使得

$$g(x) = f(x_{i-1}), \quad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

则

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(f) \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $g(x)$ 就是所求阶梯函数. □

注

显然, 所构造的阶梯函数 g 还满足条件

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant g \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

例

设 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

例

设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

Proof.

因为 f 可积, 故任给 $\varepsilon>0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

□

Proof.

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a,b]$.

Proof.

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a,b]$.于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x x\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[f(x)\sin\lambda x - f(x_i)\sin\lambda x + f(x_i)\sin\lambda x\Big]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_i)||\sin\lambda x|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n |f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}\Big|\cos(\lambda x_{i-1}) - \cos(\lambda x_i)\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Proof.

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a,b]$.于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x x\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[f(x)\sin\lambda x - f(x_i)\sin\lambda x + f(x_i)\sin\lambda x\Big]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)||\sin\lambda x|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n |f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}\big|\cos(\lambda x_{i-1}) - \cos(\lambda x_i)\big| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这说明第一个极限等式成立.

Proof.

又因为 f 有界, 故存在 K, 使得 $|f(x)| \leqslant K, \forall\, x \in [a,b]$.于是当 $\lambda > \frac{4nK}{\varepsilon}$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x x\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Big[f(x)\sin\lambda x - f(x_i)\sin\lambda x + f(x_i)\sin\lambda x\Big]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_i)||\sin\lambda x|\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n |f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin\lambda x \mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n K\frac{1}{\lambda}\left|\cos(\lambda x_{i-1}) - \cos(\lambda x_i)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2nK}{\lambda} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

这说明第一个极限等式成立.第二个极限等式同理可证. □

注

从证明的过程看，只要选取 $g_\lambda(x)$ 满足

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_\lambda(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

则就有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g_\lambda(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Elements

Typography

```
The theme provides sensible defaults to
\emph{emphasize} text, \alert{accent} parts
or show \textbf{bold} results.
```

becomes

The theme provides sensible defaults to *emphasize* text, **accent** parts or show **bold** results.

Font feature test

- Regular
- *Italic*
- Small Caps
- **Bold**
- ***Bold Italic***
- **Bold Small Caps**
- `Monospace`
- *`Monospace Italic`*
- **`Monospace Bold`**
- ***`Monospace Bold Italic`***

Lists

Items

- Milk
- Eggs
- Potatoes

Enumerations

1. First,
2. Second and
3. Last.

Descriptions

PowerPoint Meeh.

Beamer Yeeeha.

Tables

Table 1: Largest cities in the world (source: Wikipedia)

City	Population
Mexico City	20,116,842
Shanghai	19,210,000
Peking	15,796,450
Istanbul	14,160,467

Blocks

Three different block environments are pre-defined and may be styled with an optional background color.

Default

Block content.

Alert

Block content.

Example

Block content.

Default

Block content.

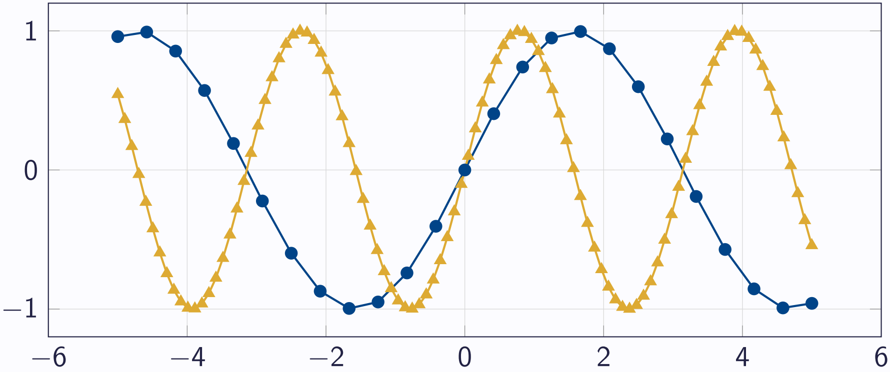
Alert

Block content.

Example

Block content.

Line plots



欢迎访问 atzjg.net

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to refer to during audience questions.

The best way to do this is to include the `appendixnumberbeamer` package in your preamble and call `\appendix` before your backup slides.

The theme will automatically turn off slide numbering and progress bars for slides in the appendix.

欢迎访问 atzjg.net