正项级数敛散性的判别法

徐海峰整理

December 19, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

基本判别法

定义

如果 $a_n > 0, \forall\ n$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**正项级数**.

定义

如果 $a_n > 0, \forall\ n$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**正项级数**.

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 是单调递增的.

定义

如果 $a_n > 0, \forall\ n$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **为正项级数**.

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 是单调递增的.因此有

命题 (基本判别法)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

定义

如果 $a_n > 0, \forall\ n$, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **为正项级数**.

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 是单调递增的.因此有

命题 (基本判别法)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

这个判别法对于 $a_n \geqslant 0$ 的级数当然也成立.

例

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 的敛散性.

例

判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 的敛散性.

解. 由 $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ 可推出

$$n+1 > \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2} \cdot \sqrt{n+1},$$

例

判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}$ 的敛散性.

解. 由 $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ 可推出

$$n+1 > \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2} \cdot \sqrt{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} &< \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n+1}} \\ &= 2\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\ &= 2\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big), \end{aligned}$$

∎

Proof.

从而,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} < 2\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big) = 2\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big) < 2.$$

Proof.

从而,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)} < 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2.$$

故原级数收敛. $\square$

跟进制有关的级数

例

设 $q > 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant q-1$ $(\forall n \geqslant 1)$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$$

收敛, 其和介于 $0, 1$ 之间.

例

设 $q>1$, $0\leqslant a_n\leqslant q-1$ $(\forall n\geqslant 1)$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{q^n}$$

收敛, 其和介于 $0,1$ 之间.

Proof.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{q^k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{q-1}{q^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q^k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{q^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q^k}=1-\frac{1}{q^n}<1,$$

例

设 $q > 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant q-1$ $(\forall n \geqslant 1)$, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{q^n}$$

收敛, 其和介于 $0, 1$ 之间.

Proof.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q^k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{q-1}{q^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{q^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = 1 - \frac{1}{q^n} < 1,$$

因此, 原级数收敛, 并且其和介于 $0, 1$ 之间. □

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \ ,$$

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots \ ,$$

这也就是 $S \in [0,1]$ 的 q 进制小数表示.

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \ ,$$

这也就是 $S \in [0, 1]$ 的 q 进制小数表示.$q = 10$ 时就是常用的 10 进制小数表示.

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \ ,$$

这也就是 $S \in [0,1]$ 的 q 进制小数表示.$q = 10$ 时就是常用的 10 进制小数表示.

$[0,1]$ 区间上的数都可以用 q 进制小数来表示, **但这种表示不是惟一的**.

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \ ,$$

这也就是 $S \in [0,1]$ 的 q 进制小数表示.$q = 10$ 时就是常用的 10 进制小数表示.

$[0,1]$ 区间上的数都可以用 q 进制小数来表示, **但这种表示不是惟一的**.例如, 在十进制中,

$$0.999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{10} \frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1.$$

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots \ ,$$

这也就是 $S \in [0,1]$ 的 q 进制小数表示.$q = 10$ 时就是常用的 10 进制小数表示.

$[0,1]$ 区间上的数都可以用 q 进制小数来表示, **但这种表示不是惟一的**.例如, 在十进制中,

$$0.999\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{10^n} = \frac{9}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{10}\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1.$$

当 $q = 2$ 时, a_n 只取 0 或 1.

如果 a_n 和 q 都是整数, 则这个级数的和 S 可记为

$$S_{(q)} = 0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots \quad ,$$

这也就是 $S \in [0, 1]$ 的 q 进制小数表示.$q = 10$ 时就是常用的 10 进制小数表示.

[0, 1] 区间上的数都可以用 q 进制小数来表示, **但这种表示不是惟一的**.例如, 在十进制中,

$$0.999 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{9}{10} \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1.$$

当 $q = 2$ 时, a_n 只取 0 或 1.在应用中, 我们可以用某些物质的特定状态来表示 0 或 1, 因而这些状态的不同组合就可以表示实数（由于实际上的限制, 一般只能表示有理数）. 由于这个原因, 二进制被广泛地应用于计算机和信息科学.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.理想情况下, TTL“高”信号正好是 5.00 伏, 而 TTL“低”信号正好是 0.00 伏.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.理想情况下, TTL “高”信号正好是 5.00 伏, 而 TTL “低”信号正好是 0.00 伏.

然而, 真正的TTL栅极电路无法输出如此完美的电压电平, 并且被设计为接受与这些理想值有很大偏差的“高”和“低”信号.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.理想情况下, TTL“高”信号正好是 5.00 伏, 而 TTL“低”信号正好是 0.00 伏.

然而, 真正的TTL栅极电路无法输出如此完美的电压电平, 并且被设计为接受与这些理想值有很大偏差的“高”和“低”信号.

“可接受”的输入信号电压范围为 0V至 0.8V（低“逻辑状态）和 2V至 5V（”高“逻辑状态）.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.理想情况下, TTL "高" 信号正好是 5.00 伏, 而 TTL "低" 信号正好是 0.00 伏.

然而, 真正的TTL栅极电路无法输出如此完美的电压电平, 并且被设计为接受与这些理想值有很大偏差的 "高" 和 "低" 信号.

"可接受" 的输入信号电压范围为 0V至 0.8V (低 "逻辑状态) 和 2V至 5V (" 高 "逻辑状态) .

"可接受" 的输出信号电压 (栅极制造商在指定负载条件下保证的电压电平) 范围为 "低" 逻辑状态的 0V 至 0.5V, "高" 逻辑状态的输出信号电压范围为 2.7V 至 5V.

TTL栅极输入的电压容差

TTL 栅极在 5 ± 0.25 伏的标称电源电压下工作.理想情况下, TTL “高” 信号正好是 5.00 伏, 而 TTL “低” 信号正好是 0.00 伏.

然而, 真正的TTL栅极电路无法输出如此完美的电压电平, 并且被设计为接受与这些理想值有很大偏差的 “高” 和 “低” 信号.

“可接受” 的输入信号电压范围为 0V至 0.8V（低 “逻辑状态）和 2V至 5V（” 高 “逻辑状态）.

“可接受” 的输出信号电压（栅极制造商在指定负载条件下保证的电压电平）范围为 “低” 逻辑状态的 0V 至 0.5V, “高” 逻辑状态的输出信号电压范围为 2.7V 至 5V.

参见Logic signal voltage levels.

比较判别法

定理

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$a_n \leqslant M b_n, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$

则 *(1)* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

定理

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$a_n \leqslant M b_n, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$

则 *(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

Proof.

记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.

定理

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果存在常数 $M > 0$, 使得

$$a_n \leqslant Mb_n, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$

则 *(1)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛*;*

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散*.*

Proof.

记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$.于是

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} Mb_k = M\sum_{k=1}^{n} b_k = MT_n.$$

$\square$

Proof.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.

Proof.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.因此 $S_n \leqslant MT$, 即 $\{s_n\}$ 有上界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

Proof.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.因此 $S_n \leqslant MT$, 即 $\{s_n\}$ 有上界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Proof.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.因此 $S_n \leqslant MT$, 即 $\{s_n\}$ 有上界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.由 $S_n \leqslant MT_n$ 可知 $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

Proof.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.因此 $S_n \leqslant MT$, 即 $\{s_n\}$ 有上界, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.由 $S_n \leqslant MT_n$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

注

(1) 条件 $a_n \leqslant Mb_n$ 只要对充分大的 n 成立即可.

Proof.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$, 这里 $T_n \leqslant T \in \mathbb{R}$.因此 $S_n \leqslant MT$, 即 $\{s_n\}$ 有上界, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.由 $S_n \leqslant MT_n$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = +\infty$, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

注

(1) 条件 $a_n \leqslant Mb_n$ 只要对充分大的 n 成立即可.

(2) 条件 $a_n \leqslant Mb_n$ 可以改写为 $\dfrac{a_n}{b_n} \leqslant M$.

在使用比较判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时，通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.

在使用比较判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时，通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.但 $a_n \leqslant Mb_n$ 这个关系式有时不容易看出，此时可以用求极限的方法.

在使用比较判别法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时, 通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.但 $a_n \leqslant Mb_n$ 这个关系式有时不容易看出, 此时可以用求极限的方法.

命题

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

在使用比较判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时, 通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.但 $a_n \leqslant Mb_n$ 这个关系式有时不容易看出, 此时可以用求极限的方法.

命题

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

- *(1)* $0 < \lambda < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

在使用比较判别法判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时, 通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.但 $a_n \leqslant Mb_n$ 这个关系式有时不容易看出, 此时可以用求极限的方法.

命题

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

- *(1)* $0 < \lambda < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;
- *(2)* $\lambda = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

在使用比较判别法判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性时，通常需要考虑某个已知敛散性的级数（比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$）作为参考对象.但 $a_n \leqslant Mb_n$ 这个关系式有时不容易看出，此时可以用求极限的方法.

命题

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

- *(1)* $0 < \lambda < +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;
- *(2)* $\lambda = 0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

  $\lambda = +\infty$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散;

Proof.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

Proof.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Proof.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon,$$

即

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

因此, 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时, 可取 $\varepsilon < \lambda$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性.

Proof.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

因此, 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时, 可取 $\varepsilon < \lambda$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性.

当 $\lambda = 0$ 时, $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$.

Proof.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda\in\mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\lambda\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lambda-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\lambda+\varepsilon.$$

因此, 当 $0<\lambda<+\infty$ 时, 可取 $\varepsilon<\lambda$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性.

当 $\lambda=0$ 时, $-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<\varepsilon$.这推出, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

Proof.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon,$$

即

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

因此, 当 $0 < \lambda < +\infty$ 时, 可取 $\varepsilon < \lambda$. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性.

当 $\lambda = 0$ 时, $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$.这推出, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda = +\infty$, 则任给 $M > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, $\frac{a_n}{b_n} > M$.

Proof.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda\in\mathbb{R}$, 则任给 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\lambda\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lambda-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\lambda+\varepsilon.$$

因此, 当 $0<\lambda<+\infty$ 时, 可取 $\varepsilon<\lambda$. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 具有相同的敛散性.

当 $\lambda=0$ 时, $-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<\varepsilon$.这推出, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lambda=+\infty$, 则任给 $M>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, $\dfrac{a_n}{b_n}>M$.这推出, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. $\square$

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.而

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调递减} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.而

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调递减} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

因此, 当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.而

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调递减} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

因此, 当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.而

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调递减} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

因此, 当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

- 如果 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调递减, 则其有上界.而

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\text{单调递减} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

因此, 当 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;
(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

Cauchy 判别法或根植判别法

- (Cauchy 判别法或根植判别法)

- (**Cauchy 判别法或根植判别法**)在比较判别法中, 取 $b_n = q^n$ (q 是固定的正数), 则得到如下结果:

- (**Cauchy 判别法或根植判别法**)在比较判别法中, 取 $b_n = q^n$ (q 是固定的正数), 则得到如下结果:
  如果 n 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

- (**Cauchy 判别法或根植判别法**)在比较判别法中, 取 $b_n = q^n$ (q 是固定的正数), 则得到如下结果:
  如果 n 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
  如果存在无穷多个 n, 使得 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Cauchy 判别法或根植判别法

- (**Cauchy 判别法或根植判别法**)在比较判别法中, 取 $b_n = q^n$ (q 是固定的正数), 则得到如下结果:
  如果 n 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
  如果存在无穷多个 n, 使得 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注

寻找这样的 q 一般是比较困难的. 最好的办法仍然是求极限.

Cauchy 判别法或根植判别法

Cauchy 判别法或根植判别法

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

Cauchy 判别法或根植判别法

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则

- $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

Cauchy 判别法或根植判别法

设
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$
则

- $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

Cauchy 判别法或根植判别法

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则

- $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- $\lambda = 1$ 时, 无法判别.

Cauchy 判别法或根植判别法

设

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则

- $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- $\lambda = 1$ 时, 无法判别.

例

对于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$;

Cauchy 判别法或根植判别法

设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \lambda.$$

则

- $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;
- $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;
- $\lambda = 1$ 时, 无法判别.

例

对于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$;

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

d’Alembert 判别法或比值判别法

达朗贝尔(d'Alembert)判别法或比值判别法

在

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

中, 取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

达朗贝尔(d'Alembert)判别法或比值判别法

在

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

中, 取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

命题

如果 n 充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$,

达朗贝尔(d'Alembert)判别法或比值判别法

在
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$
中, 取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

命题

如果 n 充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

达朗贝尔(d'Alembert)判别法或比值判别法

在

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

中, 取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

命题

如果 n 充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ (对充分大的 n 成立), 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

达朗贝尔(d'Alembert)判别法或比值判别法

在

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

中, 取 $b_n = q^n$, 得如下结果:

命题

如果 n 充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ (对充分大的 n 成立), 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当然, 还是求极限来寻找 q 比较容易.

命题

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,

命题

对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则

- $\lambda < 1$ 时级数收敛;

命题

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则

- $\lambda < 1$ 时级数收敛;
- $\lambda > 1$ 时级数发散;

命题

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则

- $\lambda < 1$ 时级数收敛;
- $\lambda > 1$ 时级数发散;
- $\lambda = 1$ 时无法判别.

命题

对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

则

- $\lambda < 1$ 时级数收敛;
- $\lambda > 1$ 时级数发散;
- $\lambda = 1$ 时无法判别.

例

例: 考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

积分判别法

积分判别法

定理

设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数，记 $a_n = f(n)$ $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

积分判别法

定理

设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数，记 $a_n = f(n)$ $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

Proof.

闭区间上的单调函数总是可积的.

定理

设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数，记 $a_n = f(n)$ $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

Proof.

闭区间上的单调函数总是可积的.令

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\ x \geqslant 1.$$

定理

设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数, 记 $a_n = f(n)$ $(n \geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

Proof.

闭区间上的单调函数总是可积的.令

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t, \quad \forall\ x \geqslant 1.$$

因为 f 为单调递减函数, 故当 $n \leqslant x \leqslant n+1$ 时,

$$a_{n+1} = f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n) = a_n,$$

定理

设 $f(x)$ 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负单调递减函数，记 $a_n=f(n)$ $(n\geqslant 1)$. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同.

Proof.

闭区间上的单调函数总是可积的.令

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\ x\geqslant 1.$$

因为 f 为单调递减函数，故当 $n\leqslant x\leqslant n+1$ 时，

$$a_{n+1}=f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)=a_n,$$

这说明 □

Proof.

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

Proof.

$$a_{n+1} \leqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

Proof.

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

事实上,

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant a_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t = a_1 + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = a_1 + F(n),$$

Proof.

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

事实上,

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant a_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t = a_1 + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = a_1 + F(n),$$

且

$$F(n) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}.$$

Proof.

$$a_{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant a_n,$$

从而有

$$S_n \leqslant a_1 + F(n), \quad F(n) \leqslant S_{n-1}.$$

事实上,

$$S_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant a_1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t = a_1 + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = a_1 + F(n),$$

且

$$F(n) = \int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}.$$

S_n 和 $F(n)$ 关于 n 都是单调递增的, 二者同时有界或无界, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散. $\square$

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的敛散性.

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\frac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-s}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-s}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当 $0 < s \leqslant 1$ 时, $F(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$;

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-s}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当 $0 < s \leqslant 1$ 时, $F(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$;$s > 1$ 时, $F(x) \to \frac{1}{s-1}$ $(x \to +\infty)$.

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-s}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当 $0 < s \leqslant 1$ 时, $F(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$;$s > 1$ 时, $F(x) \to \frac{1}{s-1}$ $(x \to +\infty)$.

这说明 $s \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 发散;

例

设 $s \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 的敛散性.

解. $s \leqslant 0$ 时, 一般项 $\dfrac{1}{n^s} \not\to 0$, 故级数发散.

$s > 0$ 时, 考虑 $f(x) = x^{-s}$, f 为非负单调递减函数,且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-s}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & s = 1, \\ \frac{1}{1-s}(x^{1-s} - 1), & s \neq 1. \end{cases}$$

当 $0 < s \leqslant 1$ 时, $F(x) \to +\infty \ (x \to +\infty)$;$s > 1$ 时, $F(x) \to \frac{1}{s-1} \ (x \to +\infty)$.

这说明 $s \leqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 发散;$s > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ 收敛. ∎

Riemann-Zeta 函数

定义

称

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

为 **Riemann-Zeta 函数**.

Riemann-Zeta 函数

定义

称

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

为 **Riemann-Zeta 函数**.

这是一个非常重要的函数，它和现代数论的关系特别紧密.

定义

称

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

为 **Riemann-Zeta 函数**.

这是一个非常重要的函数, 它和现代数论的关系特别紧密.

注

关于 Riemann-Zeta 函数进一步的介绍, 见问题1196, 问题1195.

由比较判别法派生出其他判别法

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;
-

注

(1) 根值判别法和比值判别法的好处在于不需要寻找另一个级数, 从自身即可判别;

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;
-

注

(1) 根值判别法和比值判别法的好处在于不需要寻找另一个级数, 从自身即可判别;当然, 某些情况下根值判别法和比值判别法会失效.

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;
-

注

(1) 根值判别法和比值判别法的好处在于不需要寻找另一个级数, 从自身即可判别;当然, 某些情况下根值判别法和比值判别法会失效.

(2) 当根值判别法和比值判别法无法判别时, 可以回到比较判别法.

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;
-

注

(1) 根值判别法和比值判别法的好处在于不需要寻找另一个级数, 从自身即可判别;当然, 某些情况下根值判别法和比值判别法会失效.

(2) 当根值判别法和比值判别法无法判别时, 可以回到比较判别法.有时需要考虑使用积分判别法.

前面看到,

- 比较判别法派生出比较判别法的极限形式;
- $\frac{a_n}{b_n}$ 单调递减等价于 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 本质上也是比较判别法;
- 比较判别法中令 $b_n = q^n$ 可以得到 Cauchy 判别法或根值判别法;
- 在 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 中取 $b_n = q^n$ 则得到 d'Alembert 判别法或比值判别法;
-

注

(1) 根值判别法和比值判别法的好处在于不需要寻找另一个级数, 从自身即可判别;当然, 某些情况下根值判别法和比值判别法会失效.

(2) 当根值判别法和比值判别法无法判别时, 可以回到比较判别法.有时需要考虑使用积分判别法.

(3) 在比较判别法中令 $b_n = \frac{1}{n^s}$ 或 $\frac{1}{n \ln n}$ 等, 可以进一步得到新的判别法.

一个相当一般的判别法

Kummer 判别法

这里介绍一个相当一般的判别法, 库默尔(Kummer)判别法.

Kummer 判别法

这里介绍一个相当一般的判别法, 库默尔(Kummer)判别法.

Kummer 判别法可以导出达朗贝尔(d'Alembert)判别法、拉贝(Raabe)判别法和高斯(Gauss)判别法.

数学家介绍

库默尔(Kummer)

Figure 1: 库默尔（1810-1893）

恩斯特·库默尔（Kummer，Ernst Eduard，1810.1.29-1893.5.14）德国数学家. 1810年1月29日出生于德国的索劳(索拉乌)(Sorau), 当时属于勃兰登堡公国, 现在是波兰(Zary). 1893年卒于柏林.

库默尔(Kummer)

Figure 1: 库默尔（1810-1893）

恩斯特·库默尔（Kummer，Ernst Eduard，1810.1.29-1893.5.14）德国数学家. 1810年1月29日出生于德国的索劳(索拉乌)(Sorau), 当时属于勃兰登堡公国, 现在是波兰(Zary). 1893年卒于柏林.

库默尔(Kummer)

当时距著名的滑铁卢战役还有5年, 在库默尔3岁时, 拿破仑的大军对俄战争失败.

库默尔(Kummer)

当时距著名的滑铁卢战役还有5年, 在库默尔3岁时, 拿破仑的大军对俄战争失败.

一批批满身虱子的幸存士兵通过德国准备撤到法国, 那些带着俄国人特有的斑疹伤寒的虱子, 将病毒大量地传染给了德国人, 其中包括库默尔的父亲(Curl Gotthelf Kummer).

库默尔(Kummer)

当时距著名的滑铁卢战役还有5年, 在库默尔3岁时, 拿破仑的大军对俄战争失败.

一批批满身虱子的幸存士兵通过德国准备撤到法国, 那些带着俄国人特有的斑疹伤寒的虱子, 将病毒大量地传染给了德国人, 其中包括库默尔的父亲(Curl Gotthelf Kummer).

库默尔的父亲是一位操劳过度的医生, 因被传染疾病去世. 这使得库默尔的家庭完全论文赤贫境地. 库默尔和哥哥在他们的母亲的照料下, 在艰难困苦中成长.

库默尔(Kummer)

当时距著名的滑铁卢战役还有5年, 在库默尔3岁时, 拿破仑的大军对俄战争失败.

一批批满身虱子的幸存士兵通过德国准备撤到法国, 那些带着俄国人特有的斑疹伤寒的虱子, 将病毒大量地传染给了德国人, 其中包括库默尔的父亲(Curl Gotthelf Kummer).

库默尔的父亲是一位操劳过度的医生, 因被传染疾病去世. 这使得库默尔的家庭完全论文赤贫境地. 库默尔和哥哥在他们的母亲的照料下, 在艰难困苦中成长.

拿破仑时代法国人的傲慢和苛捐杂税, 以及母亲竭力保持对父亲的记忆, 使年轻的库默尔实际上成为一位极端爱国者, 他发誓要尽最大努力使他的祖国免遭再次打击. 一读完大学就立即用他的知识去研究炮弹的弹道曲线问题.

库默尔(Kummer)

当时距著名的滑铁卢战役还有5年, 在库默尔3岁时, 拿破仑的大军对俄战争失败.

一批批满身虱子的幸存士兵通过德国准备撤到法国, 那些带着俄国人特有的斑疹伤寒的虱子, 将病毒大量地传染给了德国人, 其中包括库默尔的父亲(Curl Gotthelf Kummer).

库默尔的父亲是一位操劳过度的医生, 因被传染疾病去世. 这使得库默尔的家庭完全论文赤贫境地. 库默尔和哥哥在他们的母亲的照料下, 在艰难困苦中成长.

拿破仑时代法国人的傲慢和苛捐杂税, 以及母亲竭力保持对父亲的记忆, 使年轻的库默尔实际上成为一位极端爱国者, 他发誓要尽最大努力使他的祖国免遭再次打击. 一读完大学就立即用他的知识去研究炮弹的弹道曲线问题.

“库默尔是一个典型的老派德国人.”

库默尔(Kummer)

库默尔引入了 ideal numbers 的概念, 其定义为一个环的特殊子群.

他将高斯的算术基本定理(fundamental theorem of arithmetic, 即整数的唯一分解定理)推广到复数域.

库默尔引入 ideal numbers 是为尝试解决费马大定理(Fermat's last theorem). 在整数集上分解是唯一的(根据高斯的代数基本定理, 也叫算术基本定理), 但是在复数域上分解却不是唯一的.

库默尔(Kummer)

库默尔引入了 ideal numbers 的概念, 其定义为一个环的特殊子群.

他将高斯的算术基本定理(fundamental theorem of arithmetic, 即整数的唯一分解定理)推广到复数域.

库默尔引入 ideal numbers 是为尝试解决费马大定理(Fermat's last theorem). 在整数集上分解是唯一的(根据高斯的代数基本定理, 也叫算术基本定理), 但是在复数域上分解却不是唯一的.

然而在理想数上, 复数的因式分解变得唯一.

库默尔(Kummer)

库默尔引入了 ideal numbers 的概念, 其定义为一个环的特殊子群.

他将高斯的算术基本定理(fundamental theorem of arithmetic, 即整数的唯一分解定理)推广到复数域.

库默尔引入 ideal numbers 是为尝试解决费马大定理(Fermat's last theorem). 在整数集上分解是唯一的(根据高斯的代数基本定理, 也叫算术基本定理), 但是在复数域上分解却不是唯一的.

然而在理想数上, 复数的因式分解变得唯一.

理想数是如此强大, 以至于戴德金(Dedekind)将它们推广到一般环中更抽象的理想, 这是现代抽象代数的关键部分.