一般级数敛散性的判别方法

徐海峰整理

December 15, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

交错级数

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为**交错级数**.

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\mathrm{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\mathrm{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为**交错级数**.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\operatorname{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为**交错级数**.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\mathrm{sgn}(a_n) = (-1)^n$ 或 $\mathrm{sgn}(a_n) = (-1)^{n-1}$, 则称此级数为**交错级数**.

例

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1},$$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

这两个级数是通过对 $\arctan x$ 和 $\ln(1+x)$ 作 Taylor 展开得到的.

Leibniz 判别法

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

Leibniz 判别法

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

Proof.

证明此定理有两种方法, 一种利用 Cauchy 准则, 一种利用这样一个事实: 数列 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 和偶子列 $\{S_{2n}\}$ 都收敛且极限相等.

定理 (Leibniz)

设 a_n 单调递减趋于 0, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

Proof.

证明此定理有两种方法, 一种利用 Cauchy 准则, 一种利用这样一个事实: 数列 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 和偶子列 $\{S_{2n}\}$ 都收敛且极限相等.

这里利用 Cauchy 准则来证明. □

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} a_{n+p} \\ &= (-1)^n [a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + (-1)^{p-1} a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此, 当 $p = 2k - 1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n (S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots + a_{n+2k-1} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) \\ &\leqslant a_{n+1}, \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} S_{n+p}-S_n &= (-1)^n a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}a_{n+p} \\ &= (-1)^n[a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{n+p}]. \end{aligned}$$

因此, 当 $p=2k-1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n(S_{n+p}-S_n) &= a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+a_{n+2k-1} \\ &= a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-\cdots-(a_{n+2k-2}-a_{n+2k-1}) \\ &\leqslant a_{n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n(S_{n+p}-S_n) &= (a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+(a_{n+2k-3}-a_{n+2k-2})+a_{n+2k-1} \\ &> 0. \end{aligned}$$

$\square$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\ &\leqslant a_{n+1},\end{aligned}$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\
&\leqslant a_{n+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\
&= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\
&\leqslant a_{n+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

这说明

$$
|S_{n+p} - S_n| \leqslant a_{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{*}
$$

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\ &\leqslant a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\ &> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant a_{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{*}$$

因此原级数收敛.

Proof.

当 $p = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots - a_{n+2k} \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2k-2} - a_{n+2k-1}) - a_{n+2k} \\ &\leqslant a_{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^n(S_{n+p} - S_n) &= (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + \cdots + (a_{n+2k-1} - a_{n+2k}) \\ &> 0.\end{aligned}$$

这说明

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant a_{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{*}$$

因此原级数收敛.在 $(*)$ 中令 $p \to \infty$, 则得 $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$, 其中 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 为级数的和, 这是交错级数的误差估计. $\square$

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前 n 项和.

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前 n 项和.易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前 n 项和.易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$
\begin{aligned}
S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\
&\geqslant (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2}
\end{aligned}
$$

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前 n 项和.易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &\geqslant (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2} \end{aligned}$$

即 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列.

证法二

Proof.

设 S_n 是交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 的前 n 项和.易证 $\{S_n\}$ 极限存在当且仅当其奇子列 $\{S_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{S_{2n}\}$ 极限都存在且相等.

由条件 $\{a_n\}$ 单调递减,

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\
&\geqslant (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-3} - a_{2n-2}) = S_{2n-2}
\end{aligned}$$

即 $\{S_{2n}\}$ 是单调递增数列.又

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} \\
&= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \\
&\leqslant a_1,
\end{aligned}$$

Proof.

故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S, 且有 $S \leqslant a_1$.

续

Proof.

故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S, 且有 $S \leqslant a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

续

Proof.

故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S, 且有 $S \leqslant a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由条件 $a_{2n+1} \to 0 (n \to \infty)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Proof.

故 $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ 存在, 设为 S, 且有 $S \leqslant a_1$.

另一方面,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$$

由条件 $a_{2n+1} \to 0(n \to \infty)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

因此, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. $\square$

续

Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots)\ ,$$

续

Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots) \ ,$$

故

$$|r_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \ ,$$

Proof.

由于

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots) \ ,$$

故

$$|r_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \ ,$$

这是一个交错级数，故收敛，且其和不超过首项，即 $|r_n| \leqslant a_{n+1}$. □

例

例

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

Proof.

因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于零, 由 Leibniz 判别法知级数收敛. $\square$

一般级数

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \to \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \to 0,$$

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \to \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \to 0,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 (绝对收敛)

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

此时, 当 $n \to \infty$ 时,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| \to 0,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.即绝对收敛的级数必定收敛.

定义 (条件收敛)

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (x\in\mathbb{R})$的敛散性.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (x \in \mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \to |x|\ (n \to \infty)$,

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.
- $x=1$ 时, 原级数条件收敛;

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \to |x|$ $(n \to \infty)$,故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.
- $x=1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x=-1$ 时级数发散.

这里 $|x|>1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x \in \mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n = \frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n} \to |x|$ $(n \to \infty)$,故

- $|x| < 1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x| > 1$ 时原级数发散.
- $x = 1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时级数发散.

这里 $|x| > 1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.此时设 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |x| = 1 + \alpha$, 其中 $\alpha > 0$.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}\ (x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|\ (n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.
- $x=1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x=-1$ 时级数发散.

这里 $|x|>1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.此时设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=|x|=1+\alpha$, 其中 $\alpha>0$.任给 $0<\varepsilon<\alpha$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$|x|-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<|x|+\varepsilon.$$

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.
- $x=1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x=-1$ 时级数发散.

这里 $|x|>1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.此时设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=|x|=1+\alpha$, 其中 $\alpha>0$.任给 $0<\varepsilon<\alpha$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$|x|-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<|x|+\varepsilon.$$

这里 $|x|-\varepsilon>|x|-\alpha=1$.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$的敛散性.

解. 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$ $(n\to\infty)$,故

- $|x|<1$ 时原级数绝对收敛;
- 当 $|x|>1$ 时原级数发散.
- $x=1$ 时, 原级数条件收敛;
- $x=-1$ 时级数发散.

这里 $|x|>1$ 时, 首先由正项级数的达朗贝尔判别法推出 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.此时设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=|x|=1+\alpha$, 其中 $\alpha>0$.任给 $0<\varepsilon<\alpha$, 存在 N, 当 $n>N$ 时,

$$|x|-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<|x|+\varepsilon.$$

这里 $|x|-\varepsilon>|x|-\alpha=1$.于是当 $n>N$ 时,$a_n>1$. 故 $(-1)^{n-1}a_n\not\to 0$, 原级数发散.

∎

收敛点和发散点

定义

每一项是函数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 称为函数项级数. 若 x_0 代入后, 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是该函数项级数的**收敛点**; 若代入后发散, 则称为**发散点**. 所有收敛点的集合称为该函数项级数的**收敛域**.

收敛点和发散点

定义

每一项是函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 称为函数项级数. 若 x_0 代入后, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称 x_0 是该函数项级数的**收敛点**; 若代入后发散, 则称为**发散点**. 所有收敛点的集合称为该函数项级数的**收敛域**.

因此, 上面函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 $(-1, 1]$.

重要引理

引理 (分部求和)

设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1} - a_k) = a_n b_n - a_m b_m \ .$$

引理 (分部求和)

设 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 为数列, 则

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k)=a_nb_n-a_mb_m\ .$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)+\sum_{k=m}^{n-1} b_k(a_{k+1}-a_k)\\
=&\sum_{k=m}^{n-1}\left[a_{k+1}b_{k+1}-a_{k+1}b_k+b_ka_{k+1}-b_ka_k\right]\\
=&\sum_{k=m}^{n-1}\left[a_{k+1}b_{k+1}-a_kb_k\right]=a_nb_n-a_mb_m\ .
\end{aligned}$$

□

分部求和的简答应用

分部求和可导出

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

分部求和的简答应用

分部求和可导出

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

推论

设 a_i, b_i $(i \geqslant 1)$ 为两组实数, 则有

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall\ m \geqslant 0\ .$$

这里 $B_0 = 0$, $B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ $(k \geqslant 1)$.

推论

设 $a_i,\ b_i\ (i \geqslant 1)$ 为两组实数, 则有

$$\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m, \quad \forall\ m \geqslant 0\ .$$

这里 $B_0 = 0,\ B_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k\ (k \geqslant 1)$.

Proof.

由分部求和公式,

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1}(B_{k+1} - B_k) + \sum_{k=m}^{n-1} B_k (a_{k+1} - a_k) = a_n B_n - a_m B_m\ .$$

$\square$

Proof.

即

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_m \ .$$

Proof.

即

$$\sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_m B_m \ .$$

等号左边记 $i = k + 1$, 上式改写为

$$\begin{aligned}\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i &= \sum_{k=m+1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + (a_m - a_{m+1}) B_m + a_n B_n - a_m B_m \\ &= \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m \ .\end{aligned}$$

$\square$

也可直接计算如下:

也可直接计算如下:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=m+1}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=m+1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=m+1}^{n} a_i B_{i-1} \\
&= \sum_{i=m+1}^{n} a_i B_i - \sum_{i=m}^{n-1} a_{i+1} B_i \\
&= \sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m \ .
\end{aligned}
$$

推论 (Abel 引理)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i| \leqslant M$ $(i \geqslant 1)$, 则

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall\ m \geqslant 0.$$

推论 (Abel 引理)

设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 为单调数列, 且 $|B_i| \leqslant M$ $(i \geqslant 1)$, 则

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|a_n| + |a_{m+1}|), \quad \forall\ m \geqslant 0.$$

Proof.

根据 Abel 变换,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i b_i\right| &= \left|\sum_{i=m+1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n - a_{m+1} B_m\right| \\ &\leqslant \sum_{i=m+1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}||B_i| + |a_n||B_n| + |a_{m+1}||B_m| \\ &\leqslant M \sum_{i=m+1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| + M(|a_n| + |a_{m+1}|)\end{aligned}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&= M\left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})\right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\
&= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|) \\
&\leqslant 2M(|a_n| + |a_{m+1}|).
\end{aligned}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&= M\left|\sum_{i=m+1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})\right| + M(|a_n| + |a_{m+1}|)\\
&= M|a_{m+1} - a_n| + M(|a_n| + |a_{m+1}|)\\
&\leqslant 2M(|a_n| + |a_{m+1}|).
\end{aligned}
$$

这里第一个等号处我们用到了 $\{a_i\}$ 的单调性. □

Dirichlet判别法

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leqslant 4M|a_{n+1}| \to 0.$$

定理 (Dirichlet)

设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

由假设, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leqslant M, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

由 Abel 变换及其推论,

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leqslant 2M(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) \leqslant 4M|a_{n+1}| \to 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在.于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在.于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0.而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界,

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在.于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0.而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界,故由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛.

Abel判别法

定理 (Abel)

如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

Proof.

$\{a_n\}$ 单调有界意味着 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在.于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0.而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和有界,故由 Dirichlet 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛.从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

也收敛. □

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$.a_n 单调递减趋于 0.

例

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$.a_n 单调递减趋于 0.下证 b_n 的部分和有界.

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx.a_n$ 单调递减趋于 0.下证 b_n 的部分和有界.

利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x \ ,$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \dfrac{\cos x - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

例

判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin nx$ 的敛散性.

Proof.

记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin nx$.a_n 单调递减趋于 0.下证 b_n 的部分和有界.

利用公式

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x \ ,$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \begin{cases} 0, & x = 2k\pi, \\ \dfrac{\cos x - \cos(n + \frac{1}{2}x)}{2 \sin \frac{x}{2}}, & x \neq 2k\pi. \end{cases}$$

即 b_n 的部分和总是有界的. 故由 Dirichlet 判别法知, 原级数收敛.

□

Exercise

判断下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$.