函数项级数

徐海峰整理

December 14, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的数学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容完全基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

一致收敛

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in I,$$

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in I,$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **收敛于** g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g(n \to \infty)$.

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in I,$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **收敛于** g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g(n \to \infty)$.

例

考虑函数 $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$.

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\ x_0 \in I,$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **收敛于** g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g(n \to \infty)$.

例

考虑函数 $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$.因为对任意固定的 $x_0 \in (0,1)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in I,$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **收敛于** g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g(n \to \infty)$.

例

考虑函数 $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$.因为对任意固定的 $x_0 \in (0,1)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$.

定义

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上定义的一列函数.如果存在 I 上的函数 $g(x)$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall\, x_0 \in I,$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **收敛于** g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ 或 $g_n \to g(n \to \infty)$.

例

考虑函数 $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$.因为对任意固定的 $x_0 \in (0,1)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$.

注: 函数列 $\{g_n\}$ 收敛于 g 也称为逐点收敛或点点收敛.

定义

如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在与 $x \in I$ 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I, \tag{*}$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **在** I **上一致收敛于** g, 记为 $g_n \rightrightarrows g$.

一致收敛

定义

如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在与 $x \in I$ 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I, \tag{*}$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **在** I **上一致收敛于** g, 记为 $g_n \rightrightarrows g$.

根据定义, 一致收敛的函数列是收敛的.

一致收敛

定义

如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在与 $x \in I$ 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I, \tag{*}$$

则称**函数列** $\{g_n\}$ **在** I **上一致收敛于** g, 记为 $g_n \rightrightarrows g$.

根据定义, 一致收敛的函数列是收敛的.

一致性体现在 $(*)$ 式对于充分大的 n 和任意 $x \in I$ 均成立.

例

对于刚才的例子, $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, 但 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的.

例

对于刚才的例子, $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, 但 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的.

解. 若 $g_n \rightrightarrows 0$, 则根据定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在仅依赖于 ε 的正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|g_n(x) - 0| < \varepsilon$, $\forall\ x \in (0,1)$.

例

对于刚才的例子, $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, 但 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的.

解. 若 $g_n \rightrightarrows 0$, 则根据定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在仅依赖于 ε 的正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|g_n(x) - 0| < \varepsilon$, $\forall\, x \in (0,1)$.

设 $0 < \delta < \frac{1}{4N}$, 对于 $x \in (1-\delta, 1)$, 根据 Bernoulli 不等式,

$$|g_n(x) - 0| = x^n > (1-\delta)^n \geqslant 1 - n\delta > 1 - \frac{n}{4N},$$

若 $N < n < 2N$, 则

$$1 - \frac{n}{4N} > 1 - \frac{2N}{4N} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. ∎

例

对于刚才的例子, $g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$, 虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$, 但 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的.

解. 若 $g_n \rightrightarrows 0$, 则根据定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在仅依赖于 ε 的正整数 N, 当 $n > N$ 时, $|g_n(x) - 0| < \varepsilon$, $\forall\, x \in (0,1)$.

设 $0 < \delta < \frac{1}{4N}$, 对于 $x \in (1-\delta, 1)$, 根据 Bernoulli 不等式,

$$|g_n(x) - 0| = x^n > (1-\delta)^n \geqslant 1 - n\delta > 1 - \frac{n}{4N},$$

若 $N < n < 2N$, 则

$$1 - \frac{n}{4N} > 1 - \frac{2N}{4N} = \frac{1}{2}.$$

矛盾. ∎

$$(1-\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\delta)^k = 1 + n(-\delta) + \frac{n(n-1)}{2}\delta^2 + \cdots + (-1)^n \delta^n.$$

一致收敛的例子

例

设 $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

例

设 $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

解. 当 $0 < |x| \leqslant 1$ 时,

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n},$$

例

设 $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1, 1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

解. 当 $0 < |x| \leqslant 1$ 时,

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|x|}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n},$$

上式对 $x = 0$ 也成立.

例

设 $g_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x\in[-1,1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

解. 当 $0<|x|\leqslant 1$ 时,

$$|g_n(x)-0|=\frac{|x|}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{|x|}{2n|x|}=\frac{1}{2n},$$

上式对 $x=0$ 也成立.因此 $\{g_n\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 0. ∎

一致收敛的性质

定理

设 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

定理

设 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

[分析] 任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.

定理

设 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

[分析] 任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.$\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ 时,

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

定理

设 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

[分析] 任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.$\forall\ \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ 时,

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

常用的方法是添一项减一项, 将相关的函数放进来.

$$|g(x) - g(x_0)| \leqslant |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(x_0)| + |g_n(x_0) - g(x_0)|$$

Proof.

任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.

Proof.

任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in I.$$

Proof.

任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in I.$$

取定 $n_0 = N + 1$, 由于 g_{n_0} 在 I 上连续, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

Proof.

任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in I.$$

取定 $n_0 = N + 1$, 由于 g_{n_0} 在 I 上连续, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

因此,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leqslant |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| + |g_{n_0}(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I. \end{aligned}$$

Proof.

任取 $x_0 \in I$, 欲证 g 在 x_0 处连续.任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛的定义, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in I.$$

取定 $n_0 = N + 1$, 由于 g_{n_0} 在 I 上连续, 故存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

因此,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &\leqslant |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| + |g_{n_0}(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I. \end{aligned}$$

这说明 g 在 x_0 处是连续的. □

我们证明了, 若 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g, 且每个函数 g_n 均在 x_0 处连续, 则 g 也在 x_0 处连续.

我们证明了, 若 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g, 且每个函数 g_n 均在 x_0 处连续, 则 g 也在 x_0 处连续.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} g_n(x).$$

我们证明了, 若 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g, 且每个函数 g_n 均在 x_0 处连续, 则 g 也在 x_0 处连续.

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} g_n(x).$$

一致收敛在这里保证了求极限次序的可交换性.

一般的，我们有

一般的, 我们有

定理

设 $\{g_n\}$ 在 $x_0 \in I$ 的一个空心邻域内一致收敛于 g. 如果

$$\lim_{x\to x_0} g_n(x) = a_n, \quad \forall\ n \geqslant 1,$$

则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 以及 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在, 且这两个极限相等, 即

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} g_n(x).$$

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0,\ x \in I.$$

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0,\ x \in I.$$

因此, 当 $m, n > N_0$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0, \ x \in I.$$

因此, 当 $m, n > N_0$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

上式中令 $x \to x_0$, 得

$$|a_m - a_n| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall \ m, n > N_0.$$

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0, \ x \in I.$$

因此, 当 $m, n > N_0$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

上式中令 $x \to x_0$, 得

$$|a_m - a_n| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall \ m, n > N_0.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在.

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0,\ x \in I.$$

因此, 当 $m, n > N_0$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

上式中令 $x \to x_0$, 得

$$|a_m - a_n| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\ m, n > N_0.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在.即

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} g_n(x) = A.$$

Proof.

由 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n > N_0$ 时,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \neq x_0,\ x \in I.$$

因此, 当 $m, n > N_0$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leqslant |g_m(x) - g(x)| + |g(x) - g_n(x)| < 2\varepsilon,$$

上式中令 $x \to x_0$, 得

$$|a_m - a_n| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\ m, n > N_0.$$

由 Cauchy 准则知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在.即

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} g_n(x) = A.$$

下证 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A.$ □

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由刚才的证明, 存在 N, 使得

$$|a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g(x) - g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in I.$$

使用 $\frac{\varepsilon}{3}$ 法证明 $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由刚才的证明, 存在 N, 使得

$$|a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g(x) - g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in I.$$

因为 $\lim_{x\to x_0} g_N(x) = a_N$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|g_N(x) - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

使用 $\frac{\varepsilon}{3}$ 法证明 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由刚才的证明, 存在 N, 使得

$$|a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g(x) - g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in I.$$

因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g_N(x) = a_N$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|g_N(x) - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|g(x) - A| \leqslant |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - a_N| + |a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

使用 $\frac{\varepsilon}{3}$ 法证明 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 由刚才的证明, 存在 N, 使得

$$|a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g(x) - g_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in I.$$

因为 $\lim_{x \to x_0} g_N(x) = a_N$, 故存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|g_N(x) - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因此, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|g(x) - A| \leqslant |g(x) - g_N(x)| + |g_N(x) - a_N| + |a_N - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$. $\square$

函数列一致收敛的 Cauchy 准则

由一致收敛的定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式.

由一致收敛的定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式.

定理 (Cauchy 准则)

定义在 I 上的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I.$$

由一致收敛的定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式.

定理 (Cauchy 准则)

定义在 I 上的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I.$$

注意, 当 $\{g_n\}$ 满足上式时, 对于每一个固定的 $x_0 \in I$, $\{g_n(x_0)\}$ 都是 Cauchy 数列, 因此收敛. 其极限记为 $g(x_0)$.

由一致收敛的定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式.

定理 (Cauchy 准则)

定义在 I 上的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I.$$

注意, 当 $\{g_n\}$ 满足上式时, 对于每一个固定的 $x_0 \in I$, $\{g_n(x_0)\}$ 都是 Cauchy 数列, 因此收敛. 其极限记为 $g(x_0)$.这样就得到了极限函数 g,

由一致收敛的定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式.

定理 (Cauchy 准则)

定义在 I 上的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

注意, 当 $\{g_n\}$ 满足上式时, 对于每一个固定的 $x_0 \in I$, $\{g_n(x_0)\}$ 都是 Cauchy 数列, 因此收敛. 其极限记为 $g(x_0)$.这样就得到了极限函数 g,并且

命题

$\{g_n\}$ 一致收敛于 g.

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

上式中令 $m \to \infty$, 由上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \limsup_{m\to\infty} g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

上式中令 $m \to \infty$, 由上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \limsup_{m\to\infty} g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

这里 $\limsup\limits_{m\to\infty} g_m(x)$ 即 $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, g_m(x)$ 等于 $g(x)$.

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

上式中令 $m \to \infty$, 由上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \limsup_{m\to\infty} g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

这里 $\limsup\limits_{m\to\infty} g_m(x)$ 即 $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, g_m(x)$ 等于 $g(x)$.因此

$$|g(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

Proof.

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n > N$ 时,

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

上式中令 $m \to \infty$, 由上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < \limsup_{m\to\infty} g_m(x) - g_n(x) < \frac{1}{2}\varepsilon$$

这里 $\limsup\limits_{m\to\infty} g_m(x)$ 即 $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, g_m(x)$ 等于 $g(x)$.因此

$$|g(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall\ x \in I.$$

故 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g. $\square$

函数项级数

定义

设 $\{f_n(x)\}$ 为一列函数, 考虑形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 这种形式和称为**函数项级数**.

定义

设 $\{f_n(x)\}$ 为一列函数, 考虑形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 这种形式和称为**函数项级数**.如果部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 收敛, 则称该**函数项级数收敛**;

定义

设 $\{f_n(x)\}$ 为一列函数, 考虑形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 这种形式和称为**函数项级数**.如果部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 收敛, 则称该**函数项级数收敛**;如果 $S_n(x)$ 一致收敛, 则称该**函数项级数一致收敛**.

根据上面的讨论，我们有

根据上面的讨论, 我们有

- 如果 f_n 均为连续函数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 也是连续函数;

根据上面的讨论, 我们有

- 如果 f_n 均为连续函数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 也是连续函数;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛当且仅当任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时,

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in I,\ \forall\, p \geqslant 1.$$

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

解. 利用 Dirichlet 判别法, 可证对于任意 $x \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 均收敛.

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

解. 利用 Dirichlet 判别法, 可证对于任意 $x \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 均收敛.

但它不是一致收敛的.

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

解. 利用 Dirichlet 判别法, 可证对于任意 $x \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 均收敛.

但它不是一致收敛的.事实上, 取 $x_n = \frac{\pi}{4n}$,

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0,2\pi]$ 上的收敛性质.

解. 利用 Dirichlet 判别法, 可证对于任意 $x\in[0,2\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 均收敛.

但它不是一致收敛的.事实上, 取 $x_n=\frac{\pi}{4n}$,则

$$
\begin{aligned}
|S_{2n}(x_n)-S_n(x_n)| &= \left|\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin(2n\frac{\pi}{4n})}{2n}\right| \\
&\geqslant n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n}=\frac{1}{2\sqrt{2}},
\end{aligned}
$$

例

讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

解. 利用 Dirichlet 判别法, 可证对于任意 $x \in [0, 2\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 均收敛.

但它不是一致收敛的.事实上, 取 $x_n = \frac{\pi}{4n}$,则

$$\begin{aligned} |S_{2n}(x_n) - S_n(x_n)| &= \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1} + \cdots + \frac{\sin(2n\frac{\pi}{4n})}{2n} \right| \\ &\geqslant n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的. ∎

有两个指标的函数族 $\{f_{mn}(x)\}$

下面两个定理是数项级数相应结果的推论.

下面两个定理是数项级数相应结果的推论.

定理

设 $\{f_{mn}(x)\}$ 是依赖于指标 m, n 的一族函数, 对于每个 $n \geqslant 1$, 均有 $\lim\limits_{m\to\infty} f_{mn}(x) = f_n(x)$, 且对任意 $m \geqslant 1$, $|f_{mn}(x)| \leqslant F_n(x)$, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} f_{mn}(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(x) .$$

定理

设 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |f_{mn}(x)| \leqslant F_n(x) \quad (n \geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ 收敛, 则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f_{mn}(x).$$

函数项级数的收敛判别法

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到.

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到.

定理 (Weierstrass)

如果 $|f_n(x)| \leqslant M_n$, 而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛.

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到.

定理 (Weierstrass)

如果 $|f_n(x)| \leqslant M_n$, 而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛.

Proof.

由条件,

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p}.$$

函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到.

定理 (Weierstrass)

如果 $|f_n(x)| \leqslant M_n$, 而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛.

Proof.

由条件,

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_{n+p}.$$

故利用 Cauchy 准则即得结论. □

定理 (Dirichlet)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|B_n(x)| \leqslant M, \quad x \in I, \forall\ n \geqslant 1.$$

并且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, $a_n(x) \rightrightarrows 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 (Dirichlet)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)$ 一致有界, 即存在 $M > 0$, 使得

$$|B_n(x)| \leqslant M, \quad x \in I, \ \forall\ n \geqslant 1.$$

并且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, $a_n(x) \rightrightarrows 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Proof.

与数项级数中相应定理的证明类似. □

定理 (Abel)

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且在 I 上一致有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

定理 (Abel)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且在 I 上一致有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Proof.

运用 Abel 变换, 再利用 Cauchy 准则:

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leqslant 3\sup|a_n| \sup_{1\leqslant k\leqslant p} |b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+k}(x)|.$$

$\square$

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

Proof.

取 $a_n(x)=x^n,\ b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

Proof.

取 $a_n(x)=x^n$, $b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.对每个固定的 x, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 是单调的,

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

Proof.

取 $a_n(x)=x^n,\ b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.对每个固定的 x, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 是单调的,并且对于 $x\in[0,1]$, $|a_n(x)|=|x^n|\leqslant 1$.

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

Proof.

取 $a_n(x)=x^n,\ b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.对每个固定的 x, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 是单调的,并且对于 $x\in[0,1]$, $|a_n(x)|=|x^n|\leqslant 1$.而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 关于 x 一致收敛.

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

Proof.

取 $a_n(x)=x^n,\ b_n=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$.对每个固定的 x, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 是单调的,并且对于 $x\in[0,1]$, $|a_n(x)|=|x^n|\leqslant 1$.而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 关于 x 一致收敛.故由 Abel 判别法知原级数一致收敛. $\square$

命题

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x))$ 也一致收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x) + \mu g_n(x)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

命题

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x)+\mu g_n(x))$ 也一致收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x)+\mu g_n(x)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Proof.

使用一致收敛的定义即可. □

Dini 定理

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Dini 定理

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x\in[a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Proof.

任给 $\varepsilon>0$, 要证存在 N, 使得当 $n>N$ 时,

$$0\leqslant g_n(x)<\varepsilon, \quad \forall\, x\in[a,b].$$

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 要证存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

即要证 n 充分大以后 $A_n = \{x \in [a,b] \mid g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ 为空集.

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 要证存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

即要证 n 充分大以后 $A_n = \{x \in [a,b] \mid g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ 为空集.因为 g_n 关于 n 单调递减, $g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ 可推出 $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$, 因此 $A_n \supset A_{n+1}$.

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 要证存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

即要证 n 充分大以后 $A_n = \{x \in [a,b] \mid g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ 为空集.因为 g_n 关于 n 单调递减, $g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ 可推出 $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$, 因此 $A_n \supset A_{n+1}$.于是

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots,$$

定理 (Dini)

设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

Proof.

任给 $\varepsilon > 0$, 要证存在 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$0 \leqslant g_n(x) < \varepsilon, \quad \forall\, x \in [a,b].$$

即要证 n 充分大以后 $A_n = \{x \in [a,b] \mid g_n(x) \geqslant \varepsilon\}$ 为空集.因为 g_n 关于 n 单调递减, $g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ 可推出 $g_n(x) \geqslant g_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$, 因此 $A_n \supset A_{n+1}$.于是

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots,$$

这说明我们只需要证明某一个 A_n 是空集即可. $\square$

Proof.

(反证法)

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$.

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$.由前面,

$$A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\}.$$

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$.由前面,

$$A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\}.$$

因为 g_k 在 x_0 处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leqslant i \to \infty} g_k(x_{n_i}) \geqslant \varepsilon.$$

Proof.

(反证法)假设 A_n 均为非空集,取 $x_n \in A_n$, 则 $\{x_n\}$ 为 $[a,b]$ 上的有界点列, 从而存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$,设此子列收敛到 $x_0 \in [a,b]$.由前面,

$$A_k \supset A_{n_k} \supset \{x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \ldots\}.$$

因为 g_k 在 x_0 处连续, 我们有

$$g_k(x_0) = \lim_{k \leqslant i \to \infty} g_k(x_{n_i}) \geqslant \varepsilon.$$

上式对任意 $k \geqslant 1$ 均成立, 这和 $g_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ 相矛盾. $\square$

推论

设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间上收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

推论

设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间上收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

Proof.

考虑部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in I = [a, b]$.

推论

设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间上收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

Proof.

考虑部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in I = [a, b]$.由于 f_n 为非负连续函数, 故 $g_n(x) := f(x) - S_n(x)$ 也是 $[a, b]$ 上的非负连续函数列.

推论

设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间上收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

Proof.

考虑部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in I = [a, b]$.由于 f_n 为非负连续函数, 故 $g_n(x) := f(x) - S_n(x)$ 也是 $[a, b]$ 上的非负连续函数列.且对每个 $x \in [a, b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 根据 Dini 定理, $g_n \rightrightarrows 0$.

推论

设 $f_n(x)$ 为非负连续函数, 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在闭区间上收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

Proof.

考虑部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in I = [a, b]$.由于 f_n 为非负连续函数, 故 $g_n(x) := f(x) - S_n(x)$ 也是 $[a, b]$ 上的非负连续函数列.且对每个 $x \in [a, b]$, $g_n(x)$ 关于 n 单调递减趋于 0, 根据 Dini 定理, $g_n \rightrightarrows 0$.故 $S_n \rightrightarrows f$, 也即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 f. $\square$

注意, 上面推论中 f 的连续性条件不能去掉.

注意, 上面推论中 f 的连续性条件不能去掉.

例 (反例)

考虑 $[0,1]$ 上的函数列 $f_1(x)=1-x$, $f_n(x)=x^{n-1}-x^n$ $(n\geqslant 2)$.

注意, 上面推论中 f 的连续性条件不能去掉.

例 (反例)

考虑 $[0,1]$ 上的函数列 $f_1(x)=1-x$, $f_n(x)=x^{n-1}-x^n$ $(n\geqslant 2)$.

解.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f_n(x)=(1-x)+(x-x^2)+\cdots+(x^{n-1}-x^n)=1-x^n,$$

于是 $S_n(x)$ 收敛于

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

注意, 上面推论中 f 的连续性条件不能去掉.

例 (反例)

考虑 $[0,1]$ 上的函数列 $f_1(x) = 1 - x$, $f_n(x) = x^{n-1} - x^n$ $(n \geqslant 2)$.

解.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = (1-x) + (x - x^2) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) = 1 - x^n,$$

于是 $S_n(x)$ 收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

f 在 $x = 1$ 处不连续.

注意, 上面推论中 f 的连续性条件不能去掉.

例 (反例)

考虑 $[0,1]$ 上的函数列 $f_1(x) = 1 - x$, $f_n(x) = x^{n-1} - x^n$ $(n \geqslant 2)$.

解.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = (1-x) + (x - x^2) + \cdots + (x^{n-1} - x^n) = 1 - x^n,$$

于是 $S_n(x)$ 收敛于

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

f 在 $x = 1$ 处不连续.前面已经证明 x^n 在 $[0,1]$ 上不是一致收敛到 0. 从而这里的 $S_n(x) = 1 - x^n$ 也非一致收敛到 f. ∎

已经证明当 $s>1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 收敛,

Riemann-Zeta函数的连续性

已经证明当 $s > 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 收敛,故其和 $\zeta(s)$ 可以看成 $(1, +\infty)$ 上的函数.

Riemann-Zeta函数的连续性

已经证明当 $s > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 收敛,故其和 $\zeta(s)$ 可以看成 $(1, +\infty)$ 上的函数.

虽然函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 在整个区间 $(1, +\infty)$ 上不是一致收敛的, 但由 Dini 定理, $\zeta(s)$ 在任何闭区间 $I \subset (1, +\infty)$ 上都是一致收敛.

已经证明当 $s>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 收敛,故其和 $\zeta(s)$ 可以看成 $(1,+\infty)$ 上的函数.

虽然函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^s}$ 在整个区间 $(1,+\infty)$ 上不是一致收敛的, 但由 Dini 定理, $\zeta(s)$ 在任何闭区间 $I\subset(1,+\infty)$ 上都是一致收敛.因此 $\zeta(s)$ 在 I 上连续, 从而也是整个定义域 $(1,+\infty)$ 上的连续函数.

Backup slides

Sometimes, it is useful to add slides at the end of your presentation to