极限存在准则

徐海峰

October 8, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

部分内容参考自以下参考文献.

[1] 梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

极限存在准则

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为数列,

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列,且

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall\ n \geqslant N_0,$$

其中 N_0 为一正整数.

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列,且

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall\ n \geqslant N_0,$$

其中 N_0 为一正整数.若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

数列极限的夹逼准则(原理)

定理

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为数列,且

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \quad \forall\ n \geqslant N_0,$$

其中 N_0 为一正整数.若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A.$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

Proof.

$\forall\varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

数列极限的夹逼准则

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,

Proof.

$\forall\varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$,我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon,$$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\{a_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 均收敛到 A,故存在 N_1, N_2,当 $n > N_1$ 时,

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时, 由于 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$,我们就有

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$. □

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+1}{n^3}+\dfrac{n^2+1}{n^3+n}+\dfrac{n^2+1}{n^3+2n}+\cdots+\dfrac{n^2+1}{n^3+(n-1)n}\right]$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+1}{n^3}+\dfrac{n^2+1}{n^3+n}+\dfrac{n^2+1}{n^3+2n}+\cdots+\dfrac{n^2+1}{n^3+(n-1)n}\right]$

解. 对于 $0 \leqslant k < n$, $k \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2+1}{n^3+n^2} < \frac{n^2+1}{n^3+kn} \leqslant \frac{n^2+1}{n^3}.$$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+1}{n^3}+\dfrac{n^2+1}{n^3+n}+\dfrac{n^2+1}{n^3+2n}+\cdots+\dfrac{n^2+1}{n^3+(n-1)n}\right]$

解. 对于 $0\leqslant k<n$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2+1}{n^3+n^2}<\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n^2+1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2+1)}{n^3+n^2}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n(n^2+1)}{n^3},$$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2+1}{n^3}+\dfrac{n^2+1}{n^3+n}+\dfrac{n^2+1}{n^3+2n}+\cdots+\dfrac{n^2+1}{n^3+(n-1)n}\right]$

解. 对于 $0\leqslant k<n$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2+1}{n^3+n^2}<\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n^2+1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2+1)}{n^3+n^2}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n(n^2+1)}{n^3},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3+n^2}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3},$$

例

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n^3}+\frac{n^2+1}{n^3+n}+\frac{n^2+1}{n^3+2n}+\cdots+\frac{n^2+1}{n^3+(n-1)n}\right]$

解. 对于 $0\leqslant k<n$, $k\in\mathbb{N}$, 有

$$\frac{n^2+1}{n^3+n^2}<\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n^2+1}{n^3}.$$

于是

$$\frac{n(n^2+1)}{n^3+n^2}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3+kn}\leqslant\frac{n(n^2+1)}{n^3},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3+n^2}=1=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1)}{n^3},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3+kn}=1.$ ∎

例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

解. 当 $n \geqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] \\ &\leqslant n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

例

设 $0 < \alpha < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$.

解. 当 $n \geqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)^\alpha - n^\alpha &= n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right] \\ &\leqslant n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha - n^\alpha] = 0$. ∎

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geqslant 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geqslant 0$.

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geqslant 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geqslant 0$.则有

$$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geqslant 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geqslant 0$.则有

$$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

例

设 $a > 0$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Proof.

当 $a \geqslant 1$ 时, 记 $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, 这里 $\alpha_n \geqslant 0$.则有

$$a = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots + \alpha_n^n > n\alpha_n,$$

因此

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n < 1 + \frac{a}{n},$$

由夹逼原理即知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □

继续

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1 + na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □

继续

Proof.

当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a} > 1$.根据上面的估计, 有

$$1 < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} < 1 + \frac{1}{na},$$

即

$$1 - \frac{1}{1+na} < \sqrt[n]{a} < 1,$$

由夹逼原理即知 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. □

Exer. 用同样的思路证明: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可.若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A$ $(n \geqslant 1)$ 即可.若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列.

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可.若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列.因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可.若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列.因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

例

任何实数都是某个有理数列的极限.

Proof.

设 $A \in \mathbb{R}$.若 $A \in \mathbb{Q}$, 则令 $a_n = A\ (n \geqslant 1)$ 即可.若 A 是无理数, 则令

$$a_n = \frac{[nA]}{n}, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

因此 $\{a_n\}$ 是有理数列.因为 A 不是有理数, 故

$$nA - 1 < [nA] < nA, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

即

$$A - \frac{1}{n} < a_n = \frac{[nA]}{n} < A, \quad \forall\ n \geqslant 1.$$

由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. □

函数极限的夹逼准则(原理)

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x).$$

函数极限的夹逼准则(原理)

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x).$$

若 f_1, f_2 在 x_0 的极限存在且等于 A,

函数极限的夹逼准则(原理)

定理

设在 x_0 的一个空心开邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 内有

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x).$$

若 f_1, f_2 在 x_0 的极限存在且等于 A,则 f 在 x_0 处的极限也等于 A.

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$,则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 由于 $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$,

Proof.

$\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1, δ_2,当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$A - \varepsilon < f_1(x) < A + \varepsilon,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$A - \varepsilon < f_2(x) < A + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$,则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 由于 $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$,我们就有

$$A - \varepsilon < f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) < A + \varepsilon,$$

Proof.

$\forall\varepsilon>0$,因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$,故存在 δ_1,δ_2,当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,

$$A-\varepsilon<f_1(x)<A+\varepsilon,$$

当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,

$$A-\varepsilon<f_2(x)<A+\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 由于 $f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$,我们就有

$$A-\varepsilon<f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)<A+\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. □

例

证明: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

例

证明: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

Proof.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1 + x < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1$.

例

证明: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

Proof.

当 $-1 < x < 0$ 时, $0 < 1 + x < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

当 $x > 0$ 时, $1 < (1+x)^{\frac{1}{n}} < 1 + x$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x) = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[n]{1+x} = 1.$

例

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1.$

Proof.

当 $-1<x<0$ 时, $0<1+x<(1+x)^{\frac{1}{n}}<1$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)=1$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[n]{1+x}=1$.

当 $x>0$ 时, $1<(1+x)^{\frac{1}{n}}<1+x$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1$, 故由夹逼准则知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[n]{1+x}=1$.

因此, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$. $\square$

重要极限I

重要极限I

命题

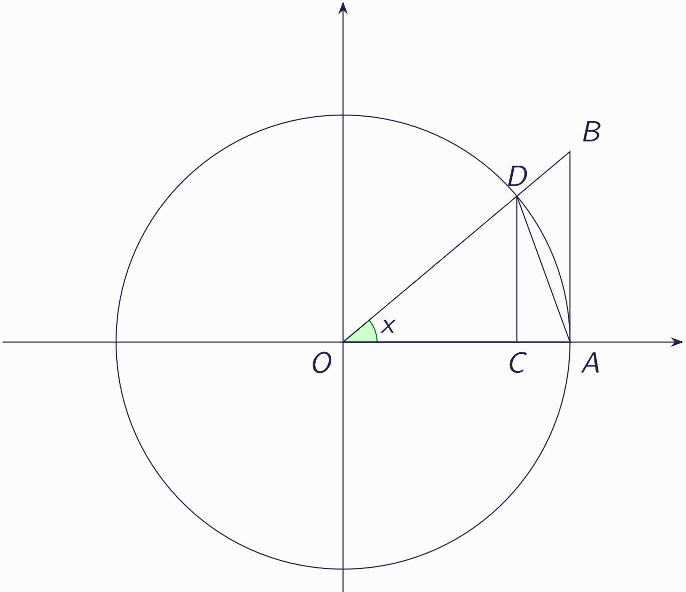
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

这个极限的证明通常使用几何的方法得到不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

然后利用函数极限的夹逼准则证明.

重要极限I



Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{扇形 OAD} < S_{\triangle OAB}$,

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形}OAD} < S_{\triangle OAB}$,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{扇形OAD} < S_{\triangle OAB}$,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{扇形OAD} < S_{\triangle OAB}$,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall\ x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立.

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{\text{扇形}OAD} < S_{\triangle OAB}$,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立.因此, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}$$

Proof.

先考虑 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 的情形.作单位圆如上图, O 为圆心, A, D 为圆周上的点, $\angle AOD = x$, DC, BA 均与 OA 垂直, B 在 OD 的延长线上.

由于 $S_{\triangle OAD} < S_{扇形 OAD} < S_{\triangle OAB}$,故

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \forall\, x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

又有 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 均为偶函数, 故上式对 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 也成立.因此, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2}$$

由夹逼原理, 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

命题

证明: $\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$

命题

证明: $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

命题

证明: $\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\cdot(\frac{x}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

命题

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\cdot(\frac{x}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

因此

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1, \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$$

命题

证明: $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Proof.

从上面的证明中, 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, 有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

而

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\cdot(\frac{x}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2,$$

因此

$$1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x < 1, \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$$

由夹逼原理, 得 $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. □

命题

证明: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

命题

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Proof.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

□

单调数列

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**,

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**,当上式中的“$\leqslant$”号换成“$<$”号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递增的**;

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**,当上式中的 "$\leqslant$" 号换成 "$<$" 号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递增的**;

若

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减数列**,

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**,当上式中的 "$\leqslant$" 号换成 "$<$" 号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递增的**;

若

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots ,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减数列**,当上式中的 "$\geqslant$" 号换成 "$>$" 号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递减的**;

单调数列

定义

设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递增数列**,当上式中的"$\leqslant$"号换成"$<$"号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递增的**;

若

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$

则称 $\{a_n\}$ 是**单调递减数列**,当上式中的"$\geqslant$"号换成"$>$"号时称 $\{a_n\}$ 是**严格单调递减的**;

单调递增数列和单调递减数列统称为**单调数列**.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A 的一个上界.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A 的**最小上界**或**上确界**, 记为 $\sup A$.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A 的**一个上界**.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A 的**最小上界或上确界**, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A **的一个上界**.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A **的最小上界或上确界**, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A **的下界和下确界**.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A **的一个上界**.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A **的最小上界或上确界**, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A **的下界**和**下确界**.**下确界**即**最大下界**.

上下确界

设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集, $\beta \in \mathbb{R}$.

定义

若 $\forall \alpha \in A$, 均有 $\alpha \leqslant \beta$, 则称 β 为 A **的一个上界**.

定义

设 γ 为 A 的一个上界, 若任给 A 的另一上界 γ', 均有 $\gamma \leqslant \gamma'$, 则称 γ 为 A **的最小上界或上确界**, 记为 $\sup A$.

易见, 上确界若存在则必惟一.

注

同样的, 可以定义集合 A **的下界和下确界**.**下确界即最大下界**.A 的下确界记为 $\inf A$.

确界原理

定理

$\mathbb{R}$ 的非空子集如果有上界则必有上确界.

确界原理

定理

$\mathbb{R}$ 的非空子集如果有上界则必有上确界.

Proof.

略. 请参考梅加强著《数学分析》. $\square$

注

类似的, 若非空子集 $A \subset \mathbb{R}$ 有下界, 则必有下确界.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leqslant x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leqslant \inf A$.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leqslant x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leqslant \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leqslant \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leqslant \sup B$. $\square$

注

确界不等式其实非常直观.

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.

(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leqslant x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leqslant \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leqslant \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leqslant \sup B$. □

注

确界不等式其实非常直观.较小集合的下确界大于等于较大集合的下确界;

确界不等式

命题

设 $A \subset B \subset \mathbb{R}$, 则当 B 有下界时 $\inf A \geqslant \inf B$; 当 B 有上界时 $\sup A \leqslant \sup B$.

Proof.

任取 $x \in A$, 则 $x \in B$.
(1) 若 B 有下界, 则 B 有下确界 $\inf B$. 因此 $\inf B \leqslant x, \forall x \in A$. 即 $\inf B$ 也是 A 的一个下界, 从而 A 有下确界 $\inf A$, 并且 $\inf B \leqslant \inf A$.

(2) 若 B 有上界, 则 B 有上确界 $\sup B$. 因此 $x \leqslant \sup B, \forall x \in A$. 即 $\sup B$ 也是 A 的一个上界, 从而 A 有上确界 $\sup A$, 并且 $\sup A \leqslant \sup B$. □

注

确界不等式其实非常直观.较小集合的下确界大于等于较大集合的下确界;较大集合的上确界大于等于较小集合的上确界.

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant 1\}$;

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant 1\}$.

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant 1\}$.

Proof.

略. $\square$

单调数列的极限

定理

设 $\{a_n\}$ 为单调数列.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant 1\}$;

(2) 若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant 1\}$.

Proof.

略. □

由此推出

推论

单调有界数列必有（有限）极限.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \cdots$$

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \cdots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$.

例

设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$, $n\geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55},\ \frac{55}{89},\ \frac{89}{144},\ \frac{144}{233},\ \frac{233}{377},\ \frac{377}{610},\ \frac{610}{987},\ \frac{987}{1597},\ \frac{1597}{2584},\ \frac{2584}{4181},\cdots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2}\leqslant a_n\leqslant 1$.考察奇数项列 $\{a_{2k-1}\}$:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{8},\ \frac{13}{21},\ \frac{34}{55},\ \frac{89}{144},\ \frac{233}{377},\ \frac{610}{987},\ \frac{1597}{2584},\ \cdots$$

例

设 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \geqslant 1$. 研究数列 $\{a_n\}$ 的极限.

在正式求解之前, 观察一下所给的数列.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \frac{2584}{4181}, \cdots$$

利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$.考察奇数项列 $\{a_{2k-1}\}$:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21}, \frac{34}{55}, \frac{89}{144}, \frac{233}{377}, \frac{610}{987}, \frac{1597}{2584}, \cdots$$

和偶数项列 $\{a_{2k}\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{8}{13}, \frac{21}{34}, \frac{55}{89}, \frac{144}{233}, \frac{377}{610}, \frac{987}{1597}, \frac{2584}{4181}, \cdots$$

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

比如, 若 a, b, c, d, e, f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$.

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765$$

比如, 若 a,b,c,d,e,f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}$.我们证明

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{d}>\frac{e}{f}.$$

从而 $\{a_{2k-1}\}$ 是单调递减的.

这两个子数列都是由 Fibonacci 数列生成的.

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765$$

比如, 若 a, b, c, d, e, f 是 Fibonacci 数列中的六个数, 由它们构成 $\{a_{2k-1}\}$ 中的三个数: $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$.我们证明

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{d} > \frac{e}{f}.$$

从而 $\{a_{2k-1}\}$ 是单调递减的.

注意到 $e = c + d$, $f = d + e = c + 2d$, 因此

$$\frac{c}{d} > \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{c}{d} > \frac{c+d}{c+2d} \Leftrightarrow c^2 + cd > d^2.$$

然后将 $c = a + b$, $d = a + 2b$ 代入, 则 $c^2 + cd > d^2$ 当且仅当 $a^2 + ab > b^2$, 此即

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}.$$

解. 利用数学归纳法易见 $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 1$, 并且 $\{a_{2k-1}\}$ 单调递减, $\{a_{2k}\}$ 单调递增, 因此它们都是收敛的, 极限分别记为 A, B. 则

$$B = \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k-1}} = \frac{1}{1+A},$$
$$A = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+a_{2k}} = \frac{1}{1+B},$$

从上式解出惟一解 $A = B = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, 因此 $\{a_n\}$ 的极限为 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. ∎

函数的单调有界准则

定理

(1) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域（或右邻域）内单调且有界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$）必存在.

定理

(1) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个左邻域（或右邻域）内单调且有界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$）必存在.

(2) 若存在 $M>0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-M)$（或 $(M,+\infty)$）内单调且有界, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$）必存在.

利用单调数列研究一般的数列

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列,

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列,且

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n.$$

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列,且

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n.$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**,

上下极限

设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 令

$$\underline{a}_n = \inf\{a_k \mid k \geqslant n\}, \quad \overline{a}_n = \sup\{a_k \mid k \geqslant n\}.$$

根据确界不等式, $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 分别是单调递增和单调递减的数列,且

$$\underline{a}_n \leqslant a_n \leqslant \overline{a}_n.$$

单调数列 $\{\underline{a}_n\}$ 和 $\{\overline{a}_n\}$ 的极限分别称为 $\{a_n\}$ 的**下极限**和**上极限**,记为

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n, \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n.$$

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列,

柯西数列

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列,如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列,如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为 **Cauchy 数列或基本列**.

柯西数列

定义 (柯西数列)

设 $\{a_n\}$ 为数列,如果 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为 **Cauchy 数列或基本列**.

注

有时简称 Cauchy 数列为 Cauchy 列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N + 1\}$,

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N+1\}$,则当 $n \leqslant N$ 时, 显然 $|a_n| \leqslant M$;

柯西数列是有界数列

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N + 1\}$,则当 $n \leqslant N$ 时, 显然 $|a_n| \leqslant M$;而当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M,$$

命题

Cauchy 数列必定是有界数列.

Proof.

设 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列.按定义, 取 $\varepsilon = 1$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| < 1.$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N + 1\}$,则当 $n \leqslant N$ 时, 显然 $|a_n| \leqslant M$;而当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为有界数列. □

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

（充分性）设 $\{a_n\}$ 收敛于 A.

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

（充分性）设 $\{a_n\}$ 收敛于 A.则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

（充分性）设 $\{a_n\}$ 收敛于 A.则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

柯西准则(Cauchy 收敛准则)

定理

$\{a_n\}$ 为 *Cauchy* 数列当且仅当它是收敛的.

Proof.

（充分性）设 $\{a_n\}$ 收敛于 A.则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列. □

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ m, n > N.$$

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ m, n > N.$$

在上式中令 $m \to \infty$,

Proof.

（必要性）设 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列.根据前面的命题, $\{a_n\}$ 是有界列, 记 A 为其上极限.

由于 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 数列,任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\varepsilon,$$

即

$$-\frac{1}{2}\varepsilon < a_m - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ m, n > N.$$

在上式中令 $m \to \infty$,利用上极限的保序性, 得

$$-\frac{1}{2}\varepsilon \leqslant \varlimsup_{m\to\infty} a_m - a_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall\ n > N.$$

□

Proof.

即

$$|A - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall\, n > N,$$

Proof.

即

$$|A - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \quad \forall\ n > N,$$

这说明 $\{a_n\}$ 收敛于 A. □

柯西(Cauchy)

Figure 1: Cauchy

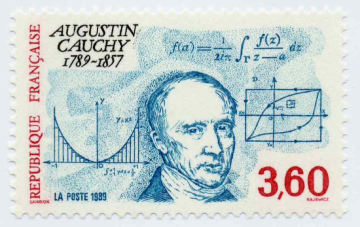


Figure 2: Cauchy（1789-1857）

柯西(Cauchy)

Figure 1: Cauchy

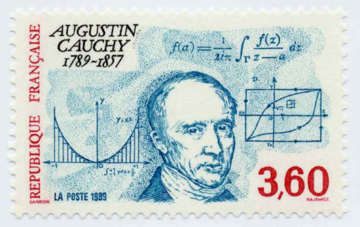


Figure 2: Cauchy（1789-1857）

Augustin-Louis Cauchy (奥古斯丁-路易斯柯西), 1789年出生于法国巴黎.

柯西(Cauchy)

Figure 1: Cauchy

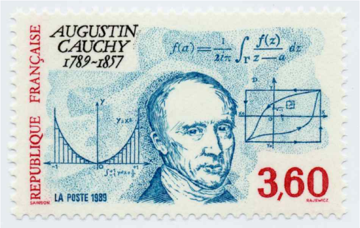


Figure 2: Cauchy（1789-1857）

Augustin-Louis Cauchy (奥古斯丁-路易斯柯西), 1789年出生于法国巴黎. 柯西是实分析和复分析以及置换群研究的先驱. 他同时也研究无穷级数的敛散性、微分方程、行列式、概率论以及数学物理.

重要极限II

重要极限II

定理

极限

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

存在.

重要极限II

定理

极限

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

存在.

记此极限为 e.

Proof.

记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$,

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\text{个}}\cdot 1$$

$$< \left[\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1},$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

Proof.

记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$,

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\text{个}}\cdot 1$$

$$< \left[\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1},$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

(这里用到了不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

其中 $x_i \geqslant 0$, $\forall\ i = 1,2,\ldots,n$.

Proof.

记 $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$,

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})}_{n\text{个}}\cdot 1$$

$$< \left[\frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}\right]^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = a_{n+1},$$

即数列 $\{a_n\}$ 是严格单调递增的.

(这里用到了不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

其中 $x_i \geqslant 0$, $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$.下面还将用到.) $\square$

Proof.

另一方面，

Proof.

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = (\frac{n}{n+1})^n = \left[\frac{n-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\
&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\text{个}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\
&> \left(\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^n \\
&= (\frac{1}{4})^{\frac{n}{n+1}}
\end{aligned}
$$

Proof.

另一方面,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = (\frac{n}{n+1})^n = \left[\frac{n-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\
&= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\text{个}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\
&> \left(\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^n \\
&= (\frac{1}{4})^{\frac{n}{n+1}}
\end{aligned}
$$

因此, $a_n < 4^{\frac{n}{n+1}} < 4$.

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=(\frac{n}{n+1})^n&=\left[\frac{n-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n\\&=\left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\text{个}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n\\&>\left(\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^n\\&=(\frac{1}{4})^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $a_n<4^{\frac{n}{n+1}}<4$.又显然 $a_n>1$, 故 $\{a_n\}$ 是有界数列.

Proof.

另一方面,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = (\frac{n}{n+1})^n &= \left[\frac{n-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\ &= \left[\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1\text{个}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+1}\right]^n \\ &> \left(\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\right)^n \\ &= (\frac{1}{4})^{\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

因此, $a_n < 4^{\frac{n}{n+1}} < 4$.又显然 $a_n > 1$, 故 $\{a_n\}$ 是有界数列.因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在. $\square$

证法二

Proof.

$$
\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \\
&= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}) \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}) \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}
$$

$\square$

证法二

Proof.

另一方面,

Proof.

另一方面,当 $n>1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
0 < a_n &< 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \\
&\leqslant 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\
&= 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3.
\end{aligned}
$$

Proof.

另一方面,当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛. 其极限记为 e, 称为**自然对数的底**.

证法二

Proof.

另一方面,当 $n > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < a_n &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛. 其极限记为 e, 称为**自然对数的底**.

经计算表明

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699 \cdots$$

命题

令 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

命题

令 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\begin{aligned}
\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} &= \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n(n-1)+n}{n(n-1)+n-1}\right)^n \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

命题

令 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n(n-1)+n}{n(n-1)+n-1}\right)^n$$
$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n,$$

命题

令 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

Proof.

由

$$\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\frac{n(n-1)+n}{n(n-1)+n-1}\right)^n$$
$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^n > (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减,

命题

令 $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, 则 $\{b_n\}$ 是严格单调递减的, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=e.$

Proof.

由

$$\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}=\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n=\left(\frac{n(n-1)+n}{n(n-1)+n-1}\right)^n$$
$$=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=(1+\frac{1}{n^2-1})^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n}$$

得

$$b_{n-1}=(1+\frac{1}{n-1})^n>(1+\frac{1}{n})^{n+1}=b_n,$$

即 $\{b_n\}$ 严格单调递减,且

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} a_n(1+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty} a_n=e.$$

重要不等式

因此有不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<e<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\geqslant 1.$$

重要极限II

定理

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e.$$

重要极限II

定理

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

(这里 $x \in \mathbb{R}$.)

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,由 $[x] \leqslant x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,由 $[x] \leqslant x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,由 $[x] \leqslant x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

因已证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$,

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,由 $[x] \leqslant x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

因已证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}$,再利用夹逼原理, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Proof.

先考虑 $x \to +\infty$ 的情形.设 $x > 1$,由 $[x] \leqslant x < [x] + 1$ 得

$$1 + \frac{1}{[x]+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{[x]}.$$

由于 $x > 1$, 故

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{[x]} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

因已证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n}$,再利用夹逼原理, 得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

类似可证

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

$\square$

续

法二.

当 $x < 0$ 时, 令 $y = -x$, 则

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{x})^{x} &= (1+\frac{1}{-y})^{-y} = \left((\frac{-y+1}{-y})^{-1}\right)^{y} = (\frac{y}{y-1})^{y} \\
&= (1+\frac{1}{y-1})^{y}
\end{aligned}
$$

续

法二.

当 $x<0$ 时, 令 $y=-x$, 则

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{x})^x &= (1+\frac{1}{-y})^{-y} = \Big((\frac{-y+1}{-y})^{-1}\Big)^y = (\frac{y}{y-1})^y \\
&= (1+\frac{1}{y-1})^y
\end{aligned}
$$

当 $x\to-\infty$ 时, $y\to+\infty$. 故

$$
\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y = e.
$$

$\square$

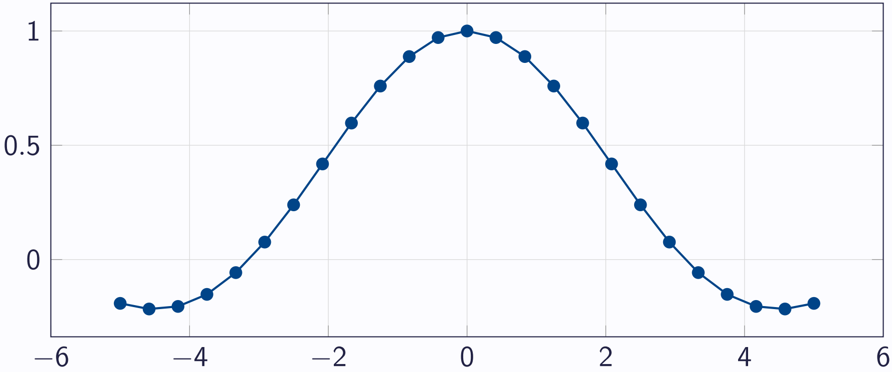
习题

习题

p. 44–45

- 1. (4)
- 2. (2)
- 4. (6)
- 5. (3), (7)

$\frac{\sin x}{x}$



Sowya 的使用

Sowya

打印斐波那契数列

使用 `fibonacci()` 函数打印斐波那契数列的前 20 项.

打印斐波那契数列

使用 `fibonacci()` 函数打印斐波那契数列的前 20 项.

```
>> fibonacci(20,t)

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584,4181,6765,

------------------------

F(20) = 6765

------------------------
```

打印递归数列

使用 `printRecursiveSeries()` 函数打印数列 $\{a_n \mid a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\}$ 的前 10 项.

打印递归数列

使用 `printRecursiveSeries()` 函数打印数列 $\{a_n \mid a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}\}$ 的前 10 项.

```
>> printRecursiveSeries(1/(1+a_n),a_n,1,10)
1|1,1|2,2|3,3|5,5|8,8|13,13|21,21|34,34|55,55|89,

------------------------
```