



导数与微分

徐海峰

October 24, 2023

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

[1] 梅加强编著《数学分析》，高等教育出版社.

[2] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

导数

定义

设函数 f 在 x_0 附近有定义, 如果极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在且有限, 则称 f 在 x_0 处可导, 此极限称为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$.

若记 $y = f(x)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

若记 $y = f(x)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号为 $\frac{df}{dx}(x_0)$, 它主要强调 f 是关于 x 求导的.

若记 $y = f(x)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 则 f 在 x_0 处的导数也可表示为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

导数的另一记号为 $\frac{df}{dx}(x_0)$, 它主要强调 f 是关于 x 求导的.

以下记号都是可以的:

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left(\frac{d}{dx}f\right)(x_0)$$

定义

如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 x_0 处可导, 导数为 A .

常见函数的导数

研究下列函数的导数

例

C , $x^n (n \geq 1)$, $a^x (a > 0, a \neq 1)$, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$.

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

$$y \equiv C, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$y' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

注

导数反映的是函数的变化率，常值函数的变化率当然是零。

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geq 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geq 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx_0^{n-1}.$$

幂函数 x^n 的导数

当 $n \geq 1$ 时, 根据 Newton 二项式展开, 有

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n,$$

于是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{nx_0^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n}{\Delta x} = nx_0^{n-1}.$$

由于对定义域内的任意 x_0 成立, 故有

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

得

$$\frac{da^x}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

得

$$\frac{da^x}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

指数函数 a^x 的导数

当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 利用前面(chap1-5)中已证明的结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

得

$$\frac{da^x}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^{x_0} \ln a.$$

即

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

特别地, $(e^x)' = e^x$.

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0} \log_a e = \frac{1}{x_0 \ln a}. \end{aligned}$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0} \log_a e = \frac{1}{x_0 \ln a}. \end{aligned}$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

对数函数 $\log_a x$ 的导数

这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 当 $x_0 > 0$ 时, 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0} \log_a e = \frac{1}{x_0 \ln a}. \end{aligned}$$

即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别地, 当 $a = e$ 时, 有 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数.

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数. 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则,

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数. 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

对数函数 $\ln x$ 的导数

我们也可以仿照上面先证明 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 然后再求 $\log_a x$ 的导数. 利用已证结论

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

以及复合函数的极限法则, 得

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

即

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则.

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则. 因此,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

正弦函数 $\sin x$ 的导数

设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2} = \cos x_0.$$

这里用到了

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

以及极限的四则运算法则. 因此,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

同理可以算出 $(\cos x)' = -\sin x$.

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x+x_0}{2} \\ &= -\sin x_0,\end{aligned}$$

余弦函数 $\cos x$ 的导数

我们换一种形式计算 $\cos x$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处的导数.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot (-1) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x+x_0}{2} \\ &= -\sin x_0,\end{aligned}$$

即

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

单侧导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限. 如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有左导数和右导数的概念.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限. 如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有左导数和右导数的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$.

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限. 如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有左导数和右导数的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$. 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限. 如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有左导数和右导数的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$. 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

左导数和右导数

f 在 x_0 处的导数是 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的空心邻域内的极限. 如果分别在 x_0 的左、右邻域内求极限, 即考虑 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 x_0 的左右极限, 则有左导数和右导数的概念.

左右导数分别记为 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$. 即

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

显然, f 在 x_0 处可导当且仅当其左右导数相等.

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$;

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1$;

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1$;

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1;$$

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1$;

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1;$$

例子

例

研究函数 $f(x) = |x|$ 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

解.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (x)' = 1$; 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = (-x)' = -1$;

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1;$$

因此, $f(x)$ 在 0 处不可导. 当 $x \neq 0$ 时, $(|x|)' = \operatorname{sgn}x$.

例子

例

定义函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

研究 f 在 $x_0 = 0$ 处的可导性.

函数可导和连续的关系

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

命题

设 f 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处连续.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

即推出

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

故 f 在 x_0 处连续. □

导数的运算法则

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

$$(1) (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\text{线性性});$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{导性}).$$

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

$$(1) (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\text{线性性});$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{导性}).$$

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导,

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

$$(1) (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\text{线性性}) ;$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{导性}) .$$

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \end{aligned}$$

命题

设 f, g 在 x 处可导, 则 fg 在 x 处可导; 如果 α, β 为常数, 则 $\alpha f + \beta g$ 在 x 处可导. 且有

$$(1) (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \quad (\text{线性性});$$

$$(2) (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{导性}).$$

Proof.

(1) 设 f, g 在 x_0 处可导, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0), \end{aligned}$$

$$\text{故 } (\alpha f(x) + \beta g(x))' \Big|_{x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

□

Proof.

(2)

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Proof.

(2)

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

这里用到了 g 在 x_0 的连续性(由其可导性推出)以及极限的运算法则. □

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零. 先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零. 先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{g(x_0)g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

推论

设 f, g 在 x_0 处可导, $g(x_0) \neq 0$. 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 处可导, 且

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

因 g 在 x_0 处可导, 故 g 在 x_0 处连续. 由 $g(x_0) \neq 0$ 可知, g 在 x_0 附近不为零. 先证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 x_0 处可导.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{g(x_0)g(x)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

由前面的命题, $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ 在 x_0 处也可导, 且有

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right]\end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left[f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) \right]\end{aligned}$$

最后一个等号用到了 g 在 x_0 连续. □

例子

研究下列函数的导数

$\log_a x (a > 0, a \neq 1)$, $\csc x$, $\sec x$, $\tan x$, $\cot x$.

例

求 $(\log_a x)'$.

例

求 $(\log_a x)'$.

解. 利用 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 可得

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$



例

求 csc x 和 sec x 的导数

例

求 csc x 和 sec x 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\csc x \cot x.$$

例

求 csc x 和 sec x 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\csc x \cot x.$$

注

这里第二个等号利用了已证结论 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

例

求 csc x 和 sec x 的导数

解.

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}(\sin x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \cos x = -\csc x \cot x.$$

注

这里第二个等号利用了已证结论 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(\cos x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \sec x \tan x.$$

$\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

$\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

解.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

例

求 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的导数

解.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x. \quad \blacksquare$$

幂函数

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

指数函数与对数函数

1. $(a^x)' = a^x \ln a$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

三角函数

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

微分

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (*)$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0)$.

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (*)$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0)$.

注

这里的线性映射可记为

$$\begin{aligned} df(x_0) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

定义 (微分)

设 f 是在 x_0 附近有定义的函数, 若存在常数 A , 使得

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (*)$$

则称 f 在 x_0 处可微, 线性映射 $x \mapsto Ax$ 称为 f 在 x_0 处的微分, 记为 $df(x_0)$.

注

这里的线性映射可记为

$$\begin{aligned} df(x_0) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

当然, 定义域也可仅限于 x_0 的某个邻域.

例

定义在 \mathbb{R} 上的函数 $y = x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y = x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微.

例

定义在 \mathbb{R} 上的函数 $y = x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y = x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微. 它在 x_0 处的微分为

$$dy(x_0) : x \mapsto x,$$

是一个恒同映射.

例

定义在 \mathbb{R} 上的函数 $y = x$ 在每一点 x_0 处都满足

$$x = x_0 + 1(x - x_0),$$

因此, $y = x$ 在每一点 $x_0 \in \mathbb{R}$ 处均可微. 它在 x_0 处的微分为

$$dy(x_0) : x \mapsto x,$$

是一个恒同映射.

注

由于 $y = x$, 故上面函数 $y = x$ 在 x_0 处的微分也写为

$$dx(x_0) : x \mapsto x,$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

因此

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

导数与微分之间的关系

命题

设 f 在 x_0 附近有定义, 则 f 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处可微, 且微分的斜率就是导数 $f'(x_0)$.

Proof.

设 f 在 x_0 处可导, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0,$$

因此

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0),$$

即

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0).$$

这说明 f 在 x_0 处可微.



Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微,

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$,

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) = A$. □

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) = A$. □

注

(1) 若函数 f 在 x_0 处可导, 则 f 在该点处的切线平移到原点后即为 f 在 x_0 处的微分 $df(x_0): x \mapsto f'(x_0)x$.

Proof.

反之, 设 f 在 x_0 处可微, $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x - x_0) + o(x - x_0)}{x - x_0} = A,$$

从而 f 在 x_0 处可导, 且导数 $f'(x_0) = A$. □

注

(1) 若函数 f 在 x_0 处可导, 则 f 在该点处的切线平移到原点后即为 f 在 x_0 处的微分 $df(x_0): x \mapsto f'(x_0)x$.

(2) 可导等价于可微仅对于一元函数成立.

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似.

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似. 由于微分的斜率等于导数, 故将 x_0 处的微分 $df(x_0)$ 写为

$$df(x_0) = f'(x_0)dx(x_0),$$

注

可见, 微分的几何意义在于它可以看成 f 的一个线性近似. 由于微分的斜率等于导数, 故将 x_0 处的微分 $df(x_0)$ 写为

$$df(x_0) = f'(x_0)dx(x_0),$$

其中 $dx(x_0)$ 是函数 x 在 x_0 处的微分(即恒同线性映射: $x \mapsto x$).

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微 (包括单侧可微), 则称 f 在 I 上可微.

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微 (包括单侧可微), 则称 f 在 I 上可微.

定义

设函数 f 在区间 I 上可微, 则对任意 $x_0 \in I$, 对应到该点处的微分, 即线性映射 $df(x_0): x \mapsto f'(x_0)x$, 于是可以定义映射

$$\begin{aligned} df : I &\rightarrow \{\text{过原点的所有直线构成的集合}\} \\ x &\mapsto df(x) \end{aligned}$$

定义

若 f 仅在 $[x_0, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处右可微. 类似地, 若仅在 $(x_0 - \delta, x_0]$ 满足 (*), 则称 f 在 x_0 处左可微.

定义

若函数 f 在区间 I 中每一点可微 (包括单侧可微), 则称 f 在 I 上可微.

定义

设函数 f 在区间 I 上可微, 则对任意 $x_0 \in I$, 对应到该点处的微分, 即线性映射 $df(x_0): x \mapsto f'(x_0)x$, 于是可以定义映射

$$\begin{aligned} df : I &\rightarrow \{\text{过原点的所有直线构成的集合}\} \\ x &\mapsto df(x) \end{aligned}$$

这个映射称为 f 的**外微分**或**全微分**. (关于外微分的性质后面会介绍.)

链式法则

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Proof.

g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

命题 (链式法则)

设 g 在 x_0 处可导, f 在 $g(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $f \circ g = f(g)$ 在 x_0 处可导, 且

$$[f(g)]'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Proof.

g 在 x_0 处可导, 故当 x 在 x_0 附近时,

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

这说明 $x \rightarrow x_0$ 时, 存在常数 C , 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$. □

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

续

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

续

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

注

链式法则对于任意有限个函数的复合都适用,

Proof.

由 f 在 $g(x_0)$ 处可导可得

$$\begin{aligned}f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + f'(g(x_0))o(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).\end{aligned}$$

这说明 $f(g)$ 在 x_0 处可微（可导），导数为 $f'(g(x_0))g'(x_0)$. □

注

链式法则对于任意有限个函数的复合都适用,比如

$$[f(g(h))]' = f'(g(h))g'(h)h'.$$

Proof.

如前所述, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 存在常数 C , 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$.

Proof.

如前所述, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 存在常数 C , 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$. 故 $o(g(x) - g(x_0)) = o(x - x_0)$.

Proof.

如前所述, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 存在常数 C , 使得 $|g(x) - g(x_0)| \leq C|x - x_0|$. 故 $o(g(x) - g(x_0)) = o(x - x_0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$



Proof.

或采用导数证明.

Proof.

或采用导数证明. 由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

Proof.

或采用导数证明. 由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{g(x) \rightarrow g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$

Proof.

或采用导数证明. 由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{g(x) \rightarrow g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0). \end{aligned}$$

最后一个等号用到了条件 $f(y)$ 在 $y_0 = g(x_0)$ 处可导, g 在 x_0 处可导.

Proof.

或采用导数证明. 由于 g 在 x_0 处可导, 故在 x_0 处连续. 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

如果当 $x \rightarrow x_0$ 时, $g(x) \neq g(x_0)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{g(x) \rightarrow g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0).\end{aligned}$$

最后一个等号用到了条件 $f(y)$ 在 $y_0 = g(x_0)$ 处可导, g 在 x_0 处可导.

若存在收敛到 x_0 的点列 $\{x_i\}$, 使得 $g(x_i) = g(x_0)$, $i = 1, 2, 3, \dots$. 由于 g 在 x_0 可导, 根据 Heine 定理, 对任何收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = g'(x_0).$$

续

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$.

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$. 而

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = 0.$$

续

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$. 而

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = 0.$$

因此, 此时

$$(f(g(x)))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

仍成立. □

Proof.

这说明 $g'(x_0) = 0$. 而

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_i)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f(g(x_0)) - f(g(x_0))}{x_i - x_0} = 0.$$

因此, 此时

$$(f(g(x)))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

仍成立. □

注

第二种情形是存在的, 例如: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

例子

例

求 $\ln|x|$ 的导数.

例

求 $\ln|x|$ 的导数.

解. 我们知道 $x \neq 0$ 时, $|x|' = \operatorname{sgn}x$. 由复合函数的求导得

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{1}{|x|}\operatorname{sgn}x = \frac{1}{x}.$$



例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0, x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0, x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

若 $\alpha > 1$, 则 $x = 0$ 处的导数计算如下:

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0.$$

例

求 x^α 的导数, 这里 $\alpha \neq 0$.

解. 当 $\alpha \neq 0, x > 0$ 时,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

若 $\alpha > 1$, 则 $x = 0$ 处的导数计算如下:

$$(x^\alpha)'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0.$$

若 $x < 0$, 此时要求 $\alpha = \frac{p}{q}$ 为有理数, p, q 为互素的整数, 且 q 为奇数. 我们有

$$(x^\alpha)' = ((-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|})' = (-1)^{\frac{p}{q}} e^{\alpha \ln |x|} (\alpha \ln |x|)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

反函数求导法则

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g . 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g . 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (*)$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g . 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (*)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

命题

设 f 在 x_0 附近连续且有反函数 g . 若 f 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 则 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Proof.

因 f 在 x_0 处可导, 故

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (*)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时上式可改写为

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + o(1)](x - x_0).$$

当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, 上式表明, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 存在常数 $C > 0$, 使得

$$|f(x) - f(x_0)| \geq C|x - x_0|, \quad \text{或} \quad |y - y_0| \geq C|g(y) - g(y_0)|.$$

Proof.

特别地, 当 $y \rightarrow y_0$ 时, $x = g(y) \rightarrow g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned}y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \rightarrow y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0)\end{aligned}$$

Proof.

特别地, 当 $y \rightarrow y_0$ 时, $x = g(y) \rightarrow g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned}y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \rightarrow y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0)\end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0).$$

Proof.

特别地, 当 $y \rightarrow y_0$ 时, $x = g(y) \rightarrow g(y_0) = x_0$. 在 (*) 中代入 $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, 可得

$$\begin{aligned}y &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(g(y) - g(y_0)) \quad (y \rightarrow y_0) \\ &= y_0 + f'(x_0)(g(y) - g(y_0)) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0)\end{aligned}$$

或改写为

$$g(y) = g(y_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(y - y_0) + o(y - y_0) \quad (y \rightarrow y_0).$$

这说明 g 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且导数为 $\frac{1}{f'(x_0)}$. □

注

导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能少.

注

导数 $f'(x_0) \neq 0$ 的条件不能少. 例如, $f(x) = x^3$ 是从 \mathbb{R} 到 \mathbb{R} 的可逆函数, f 处处可导, 但其反函数 $g(y) = y^{1/3}$ 在 $y = 0$ 处不可导.

研究下列函数的导数:

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x, \quad \operatorname{arccot} x.$$

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$.

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

例

求 $\arcsin x$ 的导数.

解. 正弦函数 $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 记 $y = f(x) = \arcsin x$, 则 $x = g(y) = \sin y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

注: 要使 $g'(y) = \cos y \neq 0$, 则 $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ■

例

求 $\arccos x$ 的导数.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. 记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$.

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. 记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

例

求 $\arccos x$ 的导数.

解. 余弦函数 $\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ 可逆, 其反函数为 $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. 记 $y = f(x) = \arccos x$, 则 $x = g(y) = \cos y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.\end{aligned}$$

注: 要使 $g'(y) = -\sin y \neq 0$, 则 $y \in (0, \pi)$. ■

例

求 $\arctan x$ 的导数.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 记 $y = f(x) = \arctan x$, 则 $x = g(y) = \tan y$.

例

求 $\arctan x$ 的导数.

解. 正切函数 $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\arctan x : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 记 $y = f(x) = \arctan x$, 则 $x = g(y) = \tan y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned} (\arctan x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$



例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$. 记 $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$, 则 $x = g(y) = \cot y$.

例

求 $\operatorname{arccot} x$ 的导数.

解. 余切函数 $\cot x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ 可逆, 其反函数为 $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$. 记 $y = f(x) = \operatorname{arccot} x$, 则 $x = g(y) = \cot y$. 由反函数求导公式, 有

$$\begin{aligned}(\operatorname{arccot} x)' = f'(x) &= \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\csc^2 y} \\ &= -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$



例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

解.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

例

求 $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, $\coth x$ 的导数.

解.

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$



$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

双曲函数的导数

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x} \right)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x \cdot (\sinh x)'}{\sinh^2 x} \\ &= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.\end{aligned}$$

双曲函数的导数

$$\begin{aligned}(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - \sinh x \cdot (\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\coth x)' &= \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{(\cosh x)' \sinh x - \cosh x \cdot (\sinh x)'}{\sinh^2 x} \\ &= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x.\end{aligned}$$

或使用复合函数求导

$$(\coth x)' = \left(\frac{1}{\tanh x}\right)' = -\frac{1}{\tanh^2 x} (\tanh^2 x)' = -\frac{1}{\tanh^2 x} \frac{1}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

例

求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的导数.

例

求函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的导数.

解.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\ln(x + \sqrt{1 + x^2})]' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$



解. 方法二. 若记 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, 其定义域为 \mathbb{R} . 容易验证 $x = \sinh y$ 是其反函数(留作习题).

解. 方法二. 若记 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, 其定义域为 \mathbb{R} . 容易验证 $x = \sinh y$ 是其反函数(留作习题). 利用反函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sinh y)'_y} = \frac{1}{\cosh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$



幂指函数

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

而

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

例

设 $u(x) > 0$, $u(x)$, $v(x)$ 都是可导函数, 求 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的导数.

解. 我们对 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 求对数后再求导:

$$(\ln f(x))' = (v(x) \ln u(x))' = v'(x) \ln x + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x),$$

而

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x),$$

故

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln x + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right).$$



解.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(u(x)^{v(x)} \right)' = \left(e^{v(x) \ln u(x)} \right)' = e^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))' \\ &= u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \\ &= u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x). \end{aligned}$$

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)} \ln u \cdot v'(x)$;

解.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))' \\&= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right) \\&= u(x)^{v(x)}\ln u(x) \cdot v'(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x).\end{aligned}$$

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)} \ln u \cdot v'(x)$;

将 $v(x)$ 视为常数 v 时, $(u(x)^v)' = v u(x)^{v-1} \cdot u'(x)$.

解.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(u(x)^{v(x)} \right)' = \left(e^{v(x) \ln u(x)} \right)' = e^{v(x) \ln u(x)} (v(x) \ln u(x))' \\ &= u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \\ &= u(x)^{v(x)} \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x). \end{aligned}$$

注

将 $u(x)$ 视为常数 u 时, $(u^{v(x)})' = u^{v(x)} \ln u \cdot v'(x)$;

将 $v(x)$ 视为常数 v 时, $(u(x)^v)' = v u(x)^{v-1} \cdot u'(x)$.

因此 $f(x) = u(x)^{v(x)}$ 的求导也遵循导性规则.

外微分

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

称这个映射 df 为 f 的**外微分**或**全微分**.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

称这个映射 df 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 dx 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

称这个映射 df 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 dx 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $df(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($df + dg$)和数乘(αdf)运算.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

称这个映射 df 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 dx 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $df(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($df + dg$)和数乘(αdf)运算.

由于在每一点 x 处, $df(x)$ 是斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 故等于 $f'(x)dx(x)$.

外微分（全微分）

设 f 在 x_0 处可微, f 在 x_0 处的微分是一个斜率为 $f'(x_0)$ 的线性映射, 记为 $df(x_0)$.

如果 f 在区间 I 上处处可微, 在对于每个 $x \in I$, 都有一个微分 $df(x)$.

于是可以定义一个映射:

$$df : x \mapsto df(x)$$

称这个映射 df 为 f 的**外微分**或**全微分**.

在这个意义下, 函数 x 的全微分 dx 是这样的一个映射, 它将任意点 x 映为该点处的恒同映射(当然是线性的).

因为 $df(x)$ 都是线性的, 我们可以在全微分之间自然地定义加法($df + dg$)和数乘(αdf)运算.

由于在每一点 x 处, $df(x)$ 是斜率为 $f'(x)$ 的线性映射, 故等于 $f'(x)dx(x)$. 因此

$$df = f'(x)dx.$$

微分形式

定义

一般地, 我们把形如 $f dx$ (f 为函数) 的表达式称为1次微分形式.

微分的运算法则

根据导数的运算法则, 我们有

命题

设 f, g 可微, 则

- $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$, 其中 α, β 为常数;
- $d(fg) = gdf + fdg$;
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$, 其中 $g \neq 0$.

复合函数求导与全微分形式的不变性

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$d[f(g)] = f'(g)dg.$$

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$d[f(g)] = f'(g)dg.$$

Proof.

根据复合函数求导和外微分的定义, 有

$$d[f(g)] = [f(g)]'dx = f'(g)g'dx = f'(g)dg.$$

全微分的形式不变性

命题

设 f, g 均可微, 且复合函数 $f(g)$ 有定义, 则

$$d[f(g)] = f'(g)dg.$$

Proof.

根据复合函数求导和外微分的定义, 有

$$d[f(g)] = [f(g)]'dx = f'(g)g'dx = f'(g)dg.$$

这个式子称为**微分的形式不变性**.



幂函数

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (\alpha \neq 0)$

指数函数与对数函数

1. $(a^x)' = a^x \ln a$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5. $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

三角函数

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x$
5. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
6. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

反三角函数

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

双曲函数

1. $(\sinh x)' = \cosh x$
2. $(\cosh x)' = \sinh x$
3. $(\tanh x)' = 1 - (\tanh x)^2$
4. $(\operatorname{coth} x)' = 1 - (\operatorname{coth} x)^2$

欢迎访问 atzjg.net