不定积分的计算

徐海峰整理

November 12, 2024

数学科学学院, 扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕾、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

换元积分法

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数，$u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数，且 $\phi(I) \subset J$.

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u=\phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(\phi(x))+C;$$

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数，$u=\phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数，且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数，即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(\phi(x))+C;$$

(2) 设 ϕ 可逆，且其逆可微，$\phi(I)=J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G, 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)\mathrm{d}u=G(\phi^{-1}(u))+C.$$

Proof.

证明是直接的.

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$\big[F(\phi(x))\big]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$\big[F(\phi(x))\big]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$\left[F(\phi(x))\right]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

$$\left[G(\phi^{-1}(u))\right]'_u = G'(x) \cdot x'_u = G'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x))\phi'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x)) = f(u).$$

Proof.

证明是直接的.

(1)

$$\left[F(\phi(x))\right]' = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

(2) $x = \phi^{-1}(u)$, ϕ^{-1} 可导, 故 $(\phi^{-1})'_u = \frac{1}{u'_x} = \frac{1}{\phi'(x)}$.

$$\left[G(\phi^{-1}(u))\right]'_u = G'(x) \cdot x'_u = G'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x))\phi'(x) \cdot \frac{1}{\phi'(x)} = f(\phi(x)) = f(u).$$

这里的 (1) 被称为第一类换元法, (2) 被称为第二类换元法. □

例

求 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, 这里 $a>0$.

例

求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, 这里 $a>0$.

解.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\mathrm{d}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

∎

例

求 $\int \sec x \mathrm{d}x$.

例

求 $\int \sec x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x),$$

例

求 $\int \sec x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \sec x \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x),$$

令 $t = \sin x$, 则上式

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|^2 + C \\
&= \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C.
\end{aligned}$$

类似地, 可证明

例

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$$

类似地, 可证明

例

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$$

另一种证法是利用之前的结果.

类似地，可证明

例

$$\int \csc x \mathrm{d}x = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C.$$

另一种证法是利用之前的结果.注意到 $\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos(x-\frac{\pi}{2})} = \sec(x - \frac{\pi}{2})$,

Proof.

$$\begin{aligned}\int \csc x \mathrm{d}x &= \int \sec(x - \frac{\pi}{2})\mathrm{d}x = \ln\left|\sec(x - \frac{\pi}{2}) + \tan(x - \frac{\pi}{2})\right| + C \\ &= \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C\end{aligned}$$

$\square$

重要的公式

$$
\begin{aligned}
1+\tan^2 x &= \sec^2 x, \\
(\tan x)' &= \sec^2 x, \\
(\sec x)' &= \sec x \cdot \tan x, \\
\int \tan x \mathrm{d}x &= \ln|\sec x| + C, \\
\int \sec x \mathrm{d}x &= \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C, \\
\int \sec^2 x \mathrm{d}x &= \tan x + C, \\
\int \sec x \cdot \tan x \mathrm{d}x &= \sec x + C.
\end{aligned}
$$

分部积分法

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

故命题得证. $\square$

分部积分法也可以写为

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x).$$

例

求 $\displaystyle\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$

例

求 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x$.

解.

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \mathrm{d}x &= -\int e^x \mathrm{d}\cos x = -\left[e^x \cos x - \int \cos x \mathrm{d}e^x\right] \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \mathrm{d}\sin x \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \mathrm{d}e^x \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

例

求 $\int e^x \sin x \mathrm{d}x.$

解.

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x \mathrm{d}x &= -\int e^x \mathrm{d}\cos x = -\left[e^x \cos x - \int \cos x \mathrm{d}e^x\right] \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \mathrm{d}\sin x \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int \sin x \mathrm{d}e^x \\
&= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

这推出

$$\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

∎

例

求 $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$.

例

求 $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$.

解.

$$\begin{aligned}
\int \sec^3 x \mathrm{d}x &= \int \sec x \cdot \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d} \tan x = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \mathrm{d} \sec x \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \mathrm{d}x = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x \\
&= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

例

求 $\int \sec^3 x \mathrm{d}x$.

解.

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \mathrm{d}x &= \int \sec x \cdot \sec^2 x \mathrm{d}x = \int \sec x \mathrm{d} \tan x = \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \mathrm{d} \sec x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \mathrm{d}x = \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x \mathrm{d}x + \int \sec x \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这推出

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \sec x \cdot \tan x + \frac{1}{2} \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C\end{aligned}$$

∎

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$;

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$; $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例

求不定积分 $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a>0$, n 为非负整数.

解. $n=0$ 时, $I_0 = x + C$; $n=1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

当 $n \geqslant 1$ 时,

例

求不定积分 $I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, 其中 $a > 0$, n 为非负整数.

解. $n = 0$ 时, $I_0 = x + C$; $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\mathrm{d}\frac{1}{(x^2+a^2)^n} \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\Big[\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x - \int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x\Big] \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

∎

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

这就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n}.$$

解. 从而

$$2na^2 I_{n+1} = (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n},$$

这就得到了递推公式

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n}.$$

由此可以求出所有的 I_n. ∎

例

计算 $\displaystyle\int \sin^n x\mathrm{d}x, \int \cos^n x\mathrm{d}x.$

例

计算 $\int \sin^n x \mathrm{d}x$, $\int \cos^n x \mathrm{d}x$.

解.

$$\int \sin^n x \mathrm{d}x = \int \sin^{n-2} x$$

∎