不定积分的计算

徐海峰

November 21, 2023

数学科学学院，扬州大学

此幻灯片的教学内容面向非数学专业的理工科本科生.

内容基于下面的教材:

梅加强编著《数学分析》, 高等教育出版社.

其他参考文献.

[1] 蒋国强、蔡蕃、张兴龙、汤进龙、孟国明、俞皓等编《高等数学》.

换元法

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u = \phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I) \subset J$.

换元积分法

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u=\phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(\phi(x))+C;$$

换元积分法

命题

设 $f(u)$ 是在区间 J 上有定义的函数, $u=\phi(x)$ 是区间 I 上的可微函数, 且 $\phi(I)\subset J$.

(1) 如果 f 在 J 上存在原函数 F, 则 $F(\phi)$ 是 $f(\phi)\phi'$ 在区间 I 上的原函数, 即

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x=\int f(u)\mathrm{d}u=F(\phi(x))+C;$$

(2) 设 ϕ 可逆, 且其逆可微, $\phi(I)=J$. 如果 $f(\phi(x))\phi'(x)$ 有原函数 G, 则 f 有原函数 $G(\phi^{-1}(u))$, 即

$$\int f(u)\mathrm{d}u=G(\phi^{-1}(u))+C.$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

分部积分法

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\displaystyle\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

命题

设 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 I 上可微, 如果 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $u(x)v'(x)$ 也有原函数,且

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Proof.

设 $u'(x)v(x)$ 有原函数, 则 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在.

$$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x),$$

故命题得证. □

有理函数的积分

有理函数

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.

有理函数

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为**有理函数**.

有理函数

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为**有理函数**.

如果 $n < m$, 则称 R 为**真分式**.

有理函数

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为**有理函数**.

如果 $n < m$, 则称 R 为**真分式**.显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和.

定义

设 $P_n(x)$, $Q_m(x)$ 分别为 n 次和 m 次多项式, 且 $Q_m(x) \neq 0$.则形如

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

的函数称为**有理函数**.

如果 $n < m$, 则称 R 为**真分式**.显然, 任何有理函数都可以写成一个多项式和一个真分式之和.因此, 有理函数的积分只要考虑真分式的情形即可.

根据实系数多项式的因式分解可以证明, 真分式可以进一步分解为下面两种简单真分式之和:

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad (k \geqslant 1); \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \quad (k \geqslant 1, p^2-4q<0).$$

(1) $k = 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A \ln|x-a| + C$$

(2) $k > 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C;$$

(1) $k = 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \mathrm{d}x = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$$

(1) $k = 1$:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

(2) $k > 1$:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$$

其中

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}.$$

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \\
=&\int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+(B-\frac{Ap}{2})}{x^2+px+q}\mathrm{d}x \\
=&\frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} \\
=&\frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})} \\
=&\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C
\end{aligned}
$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \mathrm{d}x$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$$

首先考虑 $(x^2+px+q)^{1-k}$ 的导数,

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x$$

首先考虑 $(x^2+px+q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2+px+q)^{1-k}\right]' = (1-k)(x^2+px+q)^{-k}(2x+p),$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \mathrm{d}x$$

首先考虑 $(x^2+px+q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2+px+q)^{1-k}\right]' = (1-k)(x^2+px+q)^{-k}(2x+p),$$

因此,

$$\left[\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k}\right]' = \frac{Ax+\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}$$

$k > 1$ 时, 求

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \mathrm{d}x$$

首先考虑 $(x^2+px+q)^{1-k}$ 的导数,

$$\left[(x^2+px+q)^{1-k}\right]' = (1-k)(x^2+px+q)^{-k}(2x+p),$$

因此,

$$\left[\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k}\right]' = \frac{Ax+\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}$$

将被积函数作拆分

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{Ax+\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k} + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x &= \int \frac{Ax+\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x &= \int \frac{Ax+\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-k}(x^2+px+q)^{1-k} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}\end{aligned}$$

其中 $t = x + \frac{p}{2}$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}$.

而 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^k}$ 可用递推的方法计算. 具体可参见问题1448.

例子

例

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x.$

例

求不定积分 $\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x.$

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\frac{x^3+1}{x^2-2x+3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

例

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x.$

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\dfrac{x^3+1}{x^2-2x+3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

$$\frac{x^3+1}{x^2-2x+3} = x+2+\frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}.$$

例

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x$.

解. 利用长除法（或附录中使用Sowya）将 $\dfrac{x^3+1}{x^2-2x+3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

$$\frac{x^3+1}{x^2-2x+3} = x+2+\frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}.$$

因此

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2+2x+\int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x$$

∎

解. 其中

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x &= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)^2}{(x-1)^2+2} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

续

解. 其中

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)-4}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x &= \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-1)^2}{(x-1)^2+2} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

因此

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3) - 2\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

∎

使用Sowya计算多项式的除法

例

将 $\dfrac{x^3+1}{x^2-2x+3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

例

将 $\dfrac{x^3+1}{x^2-2x+3}$ 表为一个多项式和一个真分式之和.

```
>> :mode polyn
Switch into polynomial mode.

>> (x^3+1)/(x^2-2x+3)
in> (x^3+1)/(x^2-2x+3)

out>
 quotient> q(x) = x+2
remainder> r(x) = x-5

x^1+2
------------------------
```